

## Vyhodnocování naměřených dat – role nejistoty měření při posuzování shody

Évaluation des données de mesure — Le rôle de l'incertitude de mesure dans l'évaluation de la conformité

Autorská práva k tomuto návodovému dokumentu JCGM jsou společně sdílena členskými organizacemi JCGM (BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP a OIML).

## **Autorská práva**

Ekonomická a morální autorská práva vztahující se ke všem publikacím JCGM jsou mezinárodně chráněna i přesto, že je jejich elektronická verze dostupná bez poplatku na webové stránce jedné nebo více členských organizací JCGM. Bez písemného pověření JCGM nepovoluje třetím stranám upravovat či vydávat tento dokument pod svým jménem, prodávat kopie veřejnosti, použít dokument ve vysílání médií nebo je použít v on-line publikacích. JCGM má rovněž námitky k případným distorzím, rozmnožování nebo komolení svých publikací včetně názvů, hesel a log svých či svých členských organizací.

## **Oficiální verze a překlady**

Jedinými oficiálními verzemi jsou dokumenty publikované JCGM ve svých původních jazycích.

Publikace JCGM lze překládat do jiných jazyků než těch, ve kterých byly původně publikovány JCGM. Před provedením takového překladu je třeba si vyžádat svolení od JCGM. Všechny překlady musí respektovat původní a oficiální formát vzorců a jednotek. (bez jakýchkoliv konverzí na jiné vzorce či jednotky) a musí obsahovat následující sdělení (přeložené do předmětného jazyka):

Všechny produkty JCGM jsou mezinárodně chráněny autorskými právy. Tento překlad původního dokumentu JCGM byl pořízen se svolením JCGM. JCGM si plně podržuje mezinárodně chráněná autorská práva na návrh a obsah tohoto dokumentu a na názvy, hesla a loga JCGM. Členské organizace JCGM si také podržují plně mezinárodně chráněná autorská práva na názvy, hesla a loga obsažená v tomto dokumentu. Jedinou oficiální verzí je dokument publikovaný JCGM v původních jazycích.

JCGM nenesou žádnou odpovědnost za platnost, správnost, úplnost a kvalitu informací a materiálů obsažených v jakémkoliv překladu. V době publikace je nutné poskytnout JCGM jednu kopii překladu.

## **Pořizování kopií**

Z publikací JCGM mohou být pořizovány kopie, je-li k dispozici příslušné povolení od JCGM. Jeden vzorek jakéhokoliv zkopírovaného dokumentu musí být poskytnut JCGM v době, kdy je kopie pořízena a musí obsahovat následující sdělení:

Z tohoto dokumentu byla pořízena kopie se svolením JCGM, který drží plně mezinárodně chráněná autorská práva na návrh a obsah tohoto dokumentu a na názvy, hesla a loga JCGM. Členské organizace JCGM si také podržují plně mezinárodně chráněná autorská práva na názvy, hesla a loga obsažená v tomto dokumentu. Jedinými oficiálními verzemi jsou původní těchto dokumentů publikované JCGM.

## **Zproštění odpovědnosti za škodu**

JCGM a jeho členské organizace publikovaly tento dokument ve snaze zlepšit přístup k informacím o metrologii. Snaží se pravidelně aktualizovat tento dokument, nemohou ale garantovat jeho přesnost v každém čase a nejsou odpovědné za jakoukoliv přímou či nepřímou škodu, která by mohla být důsledkem jeho použití. Jakýkoliv odkaz na komerční produkty jakéhokoliv druhu (včetně, ale ne výlučně, SW, dat či HW) či odkazy na webové stránky, nad kterými nemá JCGM a jeho členské organizace žádnou kontrolu a za které nenesou žádnou odpovědnost, neznamenají žádný souhlas, schválení nebo doporučení ze strany JCGM a jeho členských organizací.

## Obsah

Strana

Předmluva	vi
Úvod	vii
1 Cíl	1
2 Normativní odkazy	1
3 Pojmy a definice	2
3.1 Pojmy se vztahem k pravděpodobnosti	2
3.2 Pojmy se vztahem k metrologii	3
3.3 Pojmy se vztahem k posuzování shody	5
4 Ujednání a značení	7
5 Toleranční meze a toleranční intervaly	8
5.1 Měření v posuzování shody	8
5.2 Dovolené a nedovolené hodnoty: toleranční intervaly	9
5.3 Příklady tolerančních mezí	10
6 Znalost měřené veličiny	10
6.1 Pravděpodobnost a informace	10
6.2 Bayesův teorém	10
6.3 Souhrnná informace	11
6.3.1 Nejlepší odhad a standardní nejistota	11
6.3.2 Intervaly pokrytí	12
7 Pravděpodobnost shody se stanovenými požadavky	12
7.1 Obecné pravidlo pro výpočet pravděpodobnosti shody	12
7.2 Pravděpodobnosti shody s normálními PDF	13
7.3 jednostranné toleranční intervaly s normálními PDF	13
7.3.1 Jednoduchá spodní toleranční mez	13
7.3.2 Jednoduchá horní toleranční mez	14
7.3.3 Obecný přístup k jednoduchým tolerančním mezím	15
7.4 Dvoustranné toleranční intervaly s normálními PDF	15
7.5 Pravděpodobnost shody a intervaly pokrytí	16
7.6 Index způsobilosti měření $C_m$	17
7.7 Index způsobilosti měření a pravděpodobnost shody	18
8 Intervaly přijatelnosti	19
8.1 Meze přijatelnosti	19
8.2 Rozhodovací pravidlo založené na jednoduchém přijetí	20
8.3 Rozhodovací pravidla založená na ochranných pásmech	20
8.3.1 Obecné úvahy	20
8.3.2 Chráněné přijetí	21
8.3.3 Chráněné odmítnutí	22
9 Rizika spotřebitele (odběratele) a výrobce (dodavatele)	23
9.1 Obecně	23
9.2 PDF pro výrobní proces a měřicí systém	24
9.3 Možné výstupy inspekčního měření s binárním rozhodovacím pravidlem	25
9.4 Sdružená PDF pro $Y$ a $Y_m$	25
9.5 Výpočet globálních rizik	26
9.5.1 Historický kontext	26
9.5.2 Obecné vzorce	26
9.5.3 Speciální případ: Binární rozhodovací pravidlo	27

9.5.4	Nastavení mezí přijetí . . . . .	28
9.5.5	Obecný grafický přístup . . . . .	31
9.5.6	Hodnota snížené nejistoty měření . . . . .	32

## Přílohy

<b>A (informativní)</b>		
<b>Normální rozdělení</b> . . . . .		33
<b>A.1</b> Normální funkce hustoty pravděpodobnosti . . . . .		33
<b>A.2</b> Integrály normálních PDF . . . . .		33
<b>A.3</b> Pravděpodobnosti pokrytí pro normální PDF . . . . .		34
<b>A.4</b> Normální proces a hustoty pravděpodobnosti měření . . . . .		34
<b>A.4.1</b> Apriorní PDF $g_0(\eta)$ pro měřenou veličinu $Y$ . . . . .		34
<b>A.4.2</b> PDF $h(\eta_m \eta)$ pro $Y_m$ , je-li dána hodnota $Y = \eta$ . . . . .		34
<b>A.4.3</b> Marginální PDF $h_0(\eta_m)$ pro $Y_m$ . . . . .		34
<b>A.4.4</b> Následná PDF (po měření) $g(\eta \eta_m)$ pro $Y$ . . . . .		35
<b>A.5</b> Výpočty rizik s normálními PDF a binární rozhodovací pravidlo . . . . .		36
<b>B (informativní)</b>		
<b>Apriorní znalost měřené veličiny</b> . . . . .		37
<b>B.1</b> Statistické řízení procesů . . . . .		37
<b>B.2</b> Předmět náhodně vybraný z měřeného vzorku předmětů . . . . .		37
<b>B.3</b> Kladná vlastnost v blízkosti určitého fyzikálního limitu . . . . .		39
<b>C (informativní)</b>		
<b>Slovník hlavních symbolů</b> . . . . .		42
<b>Bibliografie</b> . . . . .		44



## Předmluva

V r. 1997 byl vytvořen Společný výbor pro návody v metrologii (JCGM) za předsednictví ředitele Mezinárodního úřadu pro váhy a míry (BIPM) 7 mezinárodními organizacemi, které původně v r. 1993 připravily *Návod pro vyjadřování nejistot měření* (GUM) a *Mezinárodní slovník základních a obecných pojmů v metrologii* (VIM). JCGM převzal odpovědnost za tyto 2 dokumenty od Technické poradní skupiny 4 ISO (TAG4).

Společný výbor je tvořen BIPM s Mezinárodní elektrotechnickou komisí (IEC), Mezinárodní federací klinické chemie (IFCC), Mezinárodní organizací pro standardizaci (ISO), Mezinárodní unií pro čistou a aplikovanou chemii (IUPAC), Mezinárodní unií pro čistou a aplikovanou fyziku (IUPAP) a s Mezinárodní organizací legální metrologie (OIML). Další organizace se pak připojila k těmto sedmi organizacím, totiž Mezinárodní spolupráce pro akreditaci laboratoří (ILAC).

JCGM má 2 pracovní skupiny. Pracovní skupina 1, "Vyjadřování nejistot při měření", má za úkol propagovat používání návodu GUM a připravovat Dodatky a další dokumenty pro jeho široké využívání. Pracovní skupina 2, "Pracovní skupina pro Mezinárodní slovník základních a obecných pojmů v metrologii (VIM)", má za úkol provádět revize a propagovat používání slovníku VIM. Pro další informace o činnosti JCGM viz [www.bipm.org](http://www.bipm.org)

Dokumenty jako tento jsou určeny k tomu, aby poskytly přidanou hodnotu ke GUM tím, že poskytnou návod k těm aspektům vývoje a používání nejistot měření, které nejsou explicitně obsaženy v GUM. Tento návod je v maximální možné míře konzistentní s obecnou pravděpodobnostní základnou GUM.

Tento dokument byl připraven Pracovní skupinou 1 JCGM s využitím detailních studií členských organizací JCGM a národních metrologických institutů.

## Úvod

*Posuzování shody* (viz 3.3.1) je široce definováno jako jakákoliv činnost prováděná za účelem stanovení, přímo nebo nepřímo, zda výrobek, proces, systém, osoba či organizace splňují příslušné normy a vyhovují *stanoveným požadavkům* (viz 3.3.3). ISO/IEC 17000:2004 uvádí obecné pojmy a definice vztahující se k posuzování shody včetně akreditace orgánů posuzování shody a využití posuzování shody pro usnadnění obchodu.

V určitém druhu posuzování shody, někdy nazývaném *inspekce* (viz 3.3.2) stanovení, že výrobek splňuje stanovené požadavky se opírá o měření jako hlavní zdroj informací. ISO 10576-1:2003 [22] uvádí návody pro kontrolu shody se stanovenými mezemi v případě, že *veličina* (viz 3.2.1) se měří a výsledný *interval pokrytí* (viz 3.2.7) (nazvaný *‘interval pokrytí’* v ISO 10576-1:2003) se porovnává s *tolerančním intervalem* (viz 3.3.5). Daný dokument rozšiřuje tento přístup o zahrnutí explicitních úvah o rizicích a rozvíjí obecné postupy pro rozhodování o shodě založeném *navýsledcích měření* (viz 3.2.5) s přihlédnutím ke klíčové roli *rozdělení pravděpodobnosti* (viz 3.1.1) jako vyjádření nejistoty a neúplnosti informace.

Vyhodnocení nejistoty měření je technickým problémem, jehož řešení je předmětem dokumentu JCGM 100:2008, *Návod pro vyjadřování nejistoty při měřeních* (GUM) a jeho Dodatky JCGM 101:2008, JCGM 102:2011 a JCGM 103 [3]. Tento dokument předpokládá, že předmětná veličina, *měřená veličina* (viz 3.2.4), byla změřena s výsledkem měření vyjádřeným způsobem, který je kompatibilní s principy popsány v GUM. Zejména se předpokládá, že byly uplatněny korekce pro započtení všech známých významných systematických jevů.

Výsledek měření je v posuzování shody použit k rozhodnutí, že předmět zájmu vyhovuje stanovenému požadavku. Tímto předmětem může být, například, koncová měřka či číslicový voltmetr, které mají být kalibrovány v souladu s ISO/IEC 17025:2005 [23] nebo ověřeny podle ISO 3650 [24], nebo vzorek průmyslových odpadních vod. Zmíněný požadavek může mít formu jedné nebo dvou *tolerančních mezí* (viz 3.3.4), které definují interval dovolených hodnot nazývaný *toleranční interval* (viz 3.3.5), měřitelné vlastnosti předmětu. Příklady takových vlastností zahrnují délku koncové měřky, chybu indikace voltmetru a hmotnostní koncentraci rtuti ve vzorku odpadních vod. Jestliže pravá hodnota vlastnosti leží v tolerančním intervalu, říkáme, že vyhovuje a jinak nevyhovuje.

**POZNÁMKA** Pojem *‘toleranční interval’* používaný v posuzování shody má jiný význam jako stejný pojem používaný ve statistice.

Rozhodnutí o tom, zda předmět vyhovuje, bude obecně záviset na určitém počtu měřených vlastností a s každou vlastností může být spojen jeden či více tolerančních intervalů. Může též existovat několik možných rozhodnutí ve vztahu ke každé vlastnosti, máme-li výsledek měření. Změříme-li určitou veličinu, například, můžeme se rozhodnout (a) přijmout daný předmět, (b) odmítnout daný předmět, (c) provést další měření atd. Tento dokument se zabývá předměty s jednoduchou skalární vlastností a s požadavkem daným jednou či dvěma tolerančními mezemi a binárním výstupem, ve kterém jsou pouze dva možné stavy předmětu, vyhovující a nevyhovující, a dvě možná odpovídající rozhodnutí, přijetí nebo odmítnutí. Předkládané koncepty lze rozšířit na obecnější rozhodovací problémy.

Při vyhodnocování naměřených dat je znalost možných hodnot měřené veličiny obecně zakódována a obsažena ve *funkci hustoty pravděpodobnosti* (viz 3.1.3), nebo v numerické aproximaci takové funkce. Tato znalost je často shrnuta udáním nejlepšího odhadu (braného jako *hodnota měřené veličiny* (viz 3.2.6)) spolu s příslušnou nejistotou měření, nebo intervalem pokrytí, který obsahuje hodnotu měřené veličiny s udanou *pravděpodobností pokrytí* (viz 3.2.8). Posouzení shody se stanovenými požadavky je tak záležitostí pravděpodobnosti založené na informaci, která je k dispozici po provedení měření.

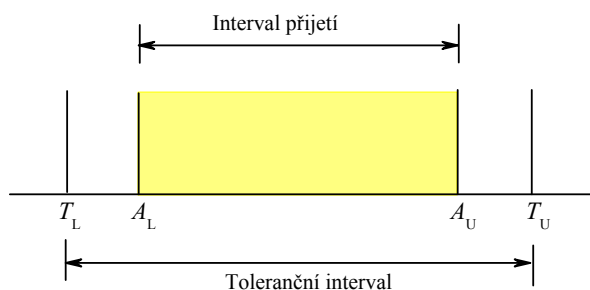
Při typickém měření není předmětná měřená veličina sama o sobě pozorovatelná. Délku ocelové koncové měřky, například, nelze přímo pozorovat, můžeme pouze pozorovat indikaci mikrometru s jeho dotykovými čelistmi v kontaktu s koncovými plochami měřky. Taková indikace poskytuje informaci o délce měřky prostřednictvím modelu měření, který zahrnuje vlivy ovlivňujících veličin jako je teplotní roztažnost a kalibrace mikrometru. V posuzování shody je rozhodnutí přijato/odmítnuto založeno na pozorovatelných datech (hodnoty měřené veličiny, např.), které vedou k odvození možných hodnot možných hodnot nepozorovatelné měřené veličiny [37].

V důsledku nejistoty měření existuje vždy riziko nesprávného rozhodnutí, jestli určitý předmět vyhovuje nebo nevyhovuje stanovenému požadavku na základě naměřené hodnoty vlastnosti předmětu. Taková nesprávná rozhodnutí

jsou dvojího typu: předmět přijatý jako vyhovující může být ve skutečnosti nevyhovující a předmět odmítnutý jako nevyhovující je ve skutečnosti vyhovující.

Definováním *intervalu přijetí* (viz 3.3.9) dovolených naměřených hodnot měřené veličiny lze rizika nesprávného rozhodnutí přijetí/odmítnutí spojená s nejistotou měření vybalancovat tak, aby náklady spojené s takovými nesprávnými rozhodnutími byly minimální. Tento dokument se zabývá tímto technickým problémem výpočtu *pravděpodobnosti shody* (viz 3.3.7) a pravděpodobností těchto dvou typů nesprávných rozhodnutí, je-li dána funkce hustoty pravděpodobnosti (PDF) pro měřenou veličinu, toleranční meze a meze intervalu přijetí.

Určitý interval přijetí jeho vztah k odpovídajícímu tolerančnímu interval je znázorněn na Obr.1.



**Obrázek 1 – Binární posuzování shody, kde jsou rozhodnutí založena na naměřených hodnotách veličiny.**

Pravá hodnota měřitelné vlastnosti (měřené veličiny) předmětu je stanovena tak, že má ležet v tolerančním intervalu definovaném mezemi ( $T_L, T_U$ ). Předmět je přijat jako vyhovující, leží-li naměřená hodnota vlastnosti v intervalu definovaném *mezemi přijetí* (viz 3.3.8) ( $A_L, A_U$ ), a jinak odmítnut jako nevyhovující.

Výběrem tolerančních mezí a mezí přijetí jsou obchodními či politickými rozhodnutími, která závisí na důsledcích spojených s odchylkami od zamýšlené kvality výroby. Obecný výklad povahy takových rozhodnutí je mimo rámec tohoto dokumentu; viz, například, odkazy [14, 15, 34, 35, 36, 44].



# Vyhodnocování naměřených dat – role nejistoty měření při posuzování shody

## 1 Cíl

Tento dokument poskytuje návod a postupy pro posouzení shody nějakého předmětu (entita, objekt nebo systém) se stanovenými požadavky. Tímto předmětem může být, například, koncová měrka, váha v obchodě nebo vzorek krve. Tyto postupy lze použít, pokud jsou splněny následující podmínky:

- předmět se vyznačuje jednoduchou skalární *veličinou* (viz 3.2.1) (měřitelná vlastnost) definovaná s takovou úrovní detailu, kterou lze dostatečně dobře reprezentovat v podstatě jednoznačnou pravou hodnotou;
 

POZNÁMKA GUM poskytuje zdůvodnění pro nepoužívání pojmu ‘pravá’, nicméně v tomto dokumentu bude používán tehdy, mohli-li by dojít k možnosti vzniku nejednoznačnosti či záměně.
- interval dovolených hodnot vlastnosti je dán jednou nebo dvěma tolerančními mezemi;
- tauto vlastnost lze měřit a *výsledek měření* (viz 3.2.5) lze vyjádřit způsobem konzistentním s principy GUM, takže znalost hodnoty této vlastnosti lze dostatečně popsat (a) *funkcí hustoty pravděpodobnosti* (viz 3.1.3) (PDF), (b) *rozdělovací funkcí* (viz 3.1.2), (c) numerickými aproximacemi těchto funkcí, nebo (d) nejlepším odhadem, spolu s intervalem pokrytí a související pravděpodobností pokrytí.

Postupy rozvíjené v tomto dokumentu lze použít ke konstrukci intervalu nazývaného interval přijetí dovolených hodnot měření vlastnosti, která nás zajímá. Meze přijetí lze vybrat tak, aby vyvážila rizika spojená s přijetím neshodných předmětů (riziko odběratele) nebo odmítnutím shodných předmětů (riziko dodavatele).

Pozornost je věnována dvěma druhům posouzení shody. Prvním je nastavení mezí přijetí tak, aby zabezpečily, že požadované pravděpodobnosti shody u jednoduchého předmětu měření bude dosaženo. Druhým je nastavení mezí přijetí tak, aby byla v průměru zajištěna přijatelná úroveň spolehlivosti při měření řady (nominálně identických) předmětů. Je poskytnut návod pro řešení těchto problémů.

Tento dokument obsahuje příklady pro ilustraci poskytovaného návodu. Uvedené koncepty lze rozšířit na obecnější problémy posuzování shody založené na měření souboru skalárních měřených veličin. Sektorově specifickým aspektům posuzování shody se věnují dokumenty jako odkazy [19, 13].

Zájmovou obec tohoto dokumentu tvoří manažeři jakosti, členové normalizačních organizací, akreditační autority a personál zkušebních a metrologických laboratoří, inspekčních orgánů, certifikačních orgánů, regulačních agentur, akademická sféra a výzkumníci.

## 2 Normativní odkazy

Dokumenty, na které je níže odkazováno, jsou nepostradatelné pro použití tohoto dokumentu.

JCGM 100:2008. Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM).

JCGM 101:2008. Evaluation of measurement data — Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” — Propagation of distributions using a Monte Carlo method.

JCGM 102:2011. Evaluation of measurement data — Supplement 2 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” — Extension to any number of output quantities.

JCGM 200:2012. International vocabulary of metrology — Basic and general concepts and associated terms (VIM3).

ISO/IEC 17000:2004. Conformity assessment — Vocabulary and general principles.

ISO 3534-1:2006. Statistics – Vocabulary and symbols – Part 1: Probability and general statistical terms.

ISO 3534-2:2006. Statistics – Vocabulary and symbols – Part 2: Applied statistics.

## 3 Pojmy a definice

Pro účely tohoto dokumentu platí definice z JCGM 100:2010, JCGM 101:2008 a JCGM 200:2012, není-li vyznačeno jinak. Některé definice s největší relevancí z těchto dokumentů jsou stručně uvedeny níže. Dodatečné informace včetně poznámek a příkladů lze nalézt v normativních odkazech.

Jsou uvedeny další definice včetně definic převzatých či upravených z jiných zdrojů, které jsou zvláště důležité v posuzování shody.

U definic, které citují jiné dokumenty, je součástí citovaného vstupu POZNÁMKA, která je umístěna před takovou citací; jiné POZNÁMKY jsou pro tento dokument specifické.

V tomto dokumentu se pojmy “indikace” a “maximální dovolená chyba (indikace)” považují spíše za veličiny než za hodnoty, v rozporu s JCGM 200:2012.

POZNÁMKA Citace ve tvaru [JCGM 101:2008 3.4] jsou k uvedeným (pod)odstavcům citovaného odkazu.

### 3.1 Pojmy se vztahem k pravděpodobnosti

#### 3.1.1 rozdělení pravděpodobnosti

rozdělení

pravděpodobnostní míra indukovaná (vyvolaná) náhodnou proměnnou

POZNÁMKA Existuje mnoho ekvivalentních matematických vyjádření určitého rozdělení včetně rozdělovací funkce (viz odstavec 3.1.2), funkce hustoty pravděpodobnosti, pokud existuje (viz odstavec 3.1.3), a charakteristické funkce.

[Upraveno z ISO 3534-1:2006 2.11]

#### 3.1.2 rozdělovací funkce

funkce, která pro každou hodnotu  $\xi$  udává pravděpodobnost, že náhodná proměnná  $X$  je menší nebo rovná  $\xi$ :

$$G_x(\xi) = \Pr(X \leq \xi)$$

[JCGM 101:2008 3.2]

#### 3.1.3 funkce hustoty pravděpodobnosti

PDF

derivative, pokud existuje, rozdělovací funkce

$$g_x(\xi) = dG_x(\xi)/d\xi$$

POZNÁMKA  $g_x(\xi) d\xi$  je tzv. ‘pravděpodobnostní člen’

$$g_x(\xi) d\xi = \Pr(\xi < X < \xi + d\xi).$$

[Upraveno z JCGM 101:2008 3.3]

**3.1.4****normální rozdělení**

rozdělení pravděpodobnosti spojité náhodné proměnné  $X$ , která má funkci hustoty pravděpodobnosti

$$g_x(\xi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\xi - \mu}{\sigma} \right)^2 \right],$$

pro  $-\infty < \xi < +\infty$

POZNÁMKA 1  $\mu$  je *očekávaná hodnota* (viz 3.1.5) a  $\sigma$  je *směrodatná odchylka* (viz 3.1.7)  $X$ .

POZNÁMKA 2 Normální rozdělení je též známo jako Gaussovo rozdělení.

[JCGM 101:2008 3.4]

**3.1.5****očekávaná hodnota**

pro spojitou náhodnou proměnnou  $X$  charakterizovanou PDF  $g_x(\xi)$ ,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi g_x(\xi) d\xi$$

POZNÁMKA 1 Očekávaná hodnota je též známa jako střední hodnota.

POZNÁMKA 2 Ne všechny náhodné proměnné mají očekávanou hodnotu.

POZNÁMKA 3 Očekávaná hodnota náhodné proměnné  $Z = F(X)$  pro danou funkci  $F(X)$  je

$$E(Z) = E(F(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) g_x(\xi) d\xi$$

[JCGM 101:2008 3.6]

**3.1.6****rozptyl**

pro spojitou náhodnou proměnnou  $X$  charakterizovanou PDF  $g_x(\xi)$ ,

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [\xi - E(X)]^2 g_x(\xi) d\xi$$

POZNÁMKA Ne všechny náhodné proměnné mají rozptyl.

[JCGM 101:2008 3.7]

**3.1.7****směrodatná odchylka**

kladná odmocnina z rozptylu

[JCGM 101:2008 3.8]

**3.2 Pojmy se vztahem k metrologii****3.2.1****veličina**

vlastnost jevu, tělesa nebo látky taková, že tato vlastnost má velikost, kterou lze vyjádřit jako číslo a referenci.

[JCGM 200:2012 1.1]

## 3.2.2

### hodnota veličiny

hodnota

číslo a reference společně vyjadřující velikost veličiny

[JCGM 200:2012 1.19]

## 3.2.3

### pravá hodnota veličiny

pravá hodnota

skutečná hodnota

hodnota veličiny, která je ve shodě s definicí veličiny

[JCGM 200:2012 2.11]

## 3.2.4

### měřená veličina

veličina, která má být měřena

[JCGM 200:2012 2.3]

POZNÁMKA V tomto dokumentu je měřená veličina měřitelnou vlastností předmětu našeho zájmu.

## 3.2.5

### výsledek měření

soubor hodnot veličiny přiřazený měřené veličině společně s jakoukoliv další dostupnou relevantní informací

POZNÁMKA Výsledek měření lze vyjádřit řadou způsobů, např. uvedením (a) změřené hodnoty veličiny s příslušnou nejistotou měření; (b) intervalu pokrytí pro měřenou veličinu s příslušnou pravděpodobností pokrytí; (c) PDF; or (d) numerickou aproximací PDF.

[JCGM 200:2012 2.9]

## 3.2.6

### naměřená hodnota veličiny

naměřená hodnota

hodnota veličiny reprezentující výsledek měření

POZNÁMKA Naměřená hodnota veličiny je známa také jako odhad či nejlepší odhad veličiny.

[JCGM 200:2012 2.10]

## 3.2.7

### interval pokrytí

interval obsahující se stanovenou pravděpodobností soubor pravých hodnot měřené veličiny založený na dostupné informaci

[JCGM 200:2012 2.36]

## 3.2.8

### pravděpodobnost pokrytí

pravděpodobnost, že soubor pravých hodnot měřené veličiny je obsažen ve specifikovaném intervalu pokrytí

[JCGM 200:2012 2.37]

**3.2.9****indikace**

hodnota veličiny poskytnutá měřidlem nebo měřicím systémem

POZNÁMKA 1 Indikace je často dána polohou ukazatele pro analogový výstup nebo zobrazeným nebo vytištěným číslem u digitálních výstupů.

POZNÁMKA 2 Indikace je také známa jako čtení.

[Upraveno z JCGM 200:2012 4.1]

**3.3 Pojmy se vztahem k posuzování shody****3.3.1****posuzování shody**

činnost prováděná za účelem stanovení, zda jsou stanovené požadavky vztahující se k výrobku, procesu, systému, osobě či organizaci splněny

[Upraveno z ISO/IEC 17000:2004 2.1]

**3.3.2****inspekce**

posouzení shody pozorováním a úsudkem doprovázené, jak přísluší, měřeními, zkoušením nebo kalibrováním

[Upraveno z ISO 3534-2:2006 4.1.2]

POZNÁMKA Měření prováděné jako součást posuzování shody se někdy nazývá inspekční měření.

**3.3.3****stanovený požadavek**

potřeba či očekávání, které je veřejně deklarováno

POZNÁMKA Stanovené požadavky mohou být deklarovány v normativních dokumentech jako jsou regulační předpisy, normy či technické specifikace.

[ISO/IEC 17000:2004 3.1]

POZNÁMKA 1 Pojem ‘očekávání’ v kontextu stanoveného požadavku nemá vztah k očekávané hodnotě náhodné proměnné; viz definice 3.1.5.

POZNÁMKA 2 V tomto dokumentu má typický stanovený požadavek formu deklarovaného intervalu dovolených hodnot měřitelné vlastnosti určitého předmětu.

PŘÍKLAD 1 Vzorek průmyslových odpadních vod (the item) nesmí mít hmotnostní koncentraci rozpuštěné rtuti (vlastnost) vyšší než 10 ng/L.

PŘÍKLAD 2 Váha v obchodě (předmět) musí mít indikaci  $R$  (vlastnost) v intervalu  $[999,5 \text{ g} \leq R \leq 1000,5 \text{ g}]$  při měření etalonového závaží 1 kg.

**3.3.4****toleranční mez**

specification limit

stanovená horní nebo spodní hranice dovolených hodnot určité vlastnosti

[Upraveno z ISO 3534-2:2006 3.1.3]

**3.3.5****toleranční interval**

interval dovolených hodnot určité vlastnosti

[Upraveno z ISO 10576-1:2003 3.5]

POZNÁMKA 1 Není-li uvedeno ve specifikaci jinak, patří toleranční meze k tolerančnímu intervalu (jsou jeho součástí).

POZNÁMKA 2 Pojem ‘toleranční interval’ tak, jak je používán v posuzování shody, má jiný význam než stejný pojem používaný ve statistice.

POZNÁMKA 3 Toleranční interval se nazývá ‘zóna specifikace’ v ASME B89.7.3.1:2001 [2].

### 3.3.6

#### **tolerance**

stanovená tolerance

rozdíl mezi horní a dolní toleranční mezí

### 3.3.7

#### **pravděpodobnost shody**

pravděpodobnost, že určitý předmět splňuje stanovený požadavek

### 3.3.8

#### **mez přijetí**

stanovená horní nebo spodní hranice dovolených naměřených hodnot veličiny

[Upraveno z ISO 3534-2:2006 3.1.6]

### 3.3.9

#### **interval přijetí**

interval dovolených naměřených hodnot veličiny

POZNÁMKA 1 Není-li ve specifikaci uvedeno jinak, patří meze přijetí do intervalu přijetí.

POZNÁMKA 2 Interval přijetí se nazývá ‘zóna přijetí’ v ASME B89.7.3.1 [2].

### 3.3.10

#### **Interval odmítnutí**

interval nedovolených naměřených hodnot veličiny

POZNÁMKA 1 Interval odmítnutí se nazývá ‘zóna odmítnutí’ v ASME B89.7.3.1 [2].

### 3.3.11

#### **ochranný pás**

interval mezi toleranční mezí a odpovídající mezí přijetí

POZNÁMKA Ochranný pás zahrnuje tyto meze.

### 3.3.12

#### **rozhodovací pravidlo**

dokumentované pravidlo, které popisuje, jakým způsobem bude vzata v úvahu nejistota měření ve vztahu k přijetí či odmítnutí předmětu při daném stanoveném požadavku a výsledku měření

[Upraveno z ASME B89.7.3.1-2001 [2]]

### 3.3.13

#### **specifické riziko odběratele**

pravděpodobnost, že určitý přijatý předmět nevyhovuje

**3.3.14****specifické riziko výrobce**

pravděpodobnost, že určitý odmítnutý předmět vyhovuje

**3.3.15****komplexní riziko odběratele**

consumer's risk

pravděpodobnost, že nevyhovující předmět bude přijat na základě budoucího výsledku měření

**3.3.16****komplexní riziko výrobce**

producer's risk

pravděpodobnost, že vyhovující předmět bude odmítnut na základě budoucího výsledku měření

**3.3.17****index způsobilosti měření**

tolerance dělená násobkem standardní nejistoty měření spojená s měřenou hodnotou vlastnosti předmětu

POZNÁMKA V tomto dokumentu se za tento násobek bere 4; viz odstavec 7.6.3

**3.3.18****maximální dovolená chyba (indikace)**

MPE

pro měřicí přístroj, je maximální rozdíl povolený specifikacemi či regulacemi mezi indikací přístroje a měřenou veličinou

POZNÁMKA 1 Je-li stanoven více než jeden maximální rozdíl, je použit pojem “maximální dovolené chyby”; např. stanovený maximální záporný rozdíl a stanovený maximální kladný rozdíl.

POZNÁMKA 2 Chybu indikace lze psát jako  $E = R - R_0$ , kde  $R$  je indikace a  $R_0$  značí indikaci ideálního měřicího přístroje měřícího stejnou měřenou veličinu  $Y$ . Při zkoušení a ověřování měřicího přístroje se chyba indikace obvykle vyhodnocuje na základě změření kalibrovaného referenčního etalonu.

## 4 Ujednání a značení

Pro účely tohoto dokumentu se přijímají následující konvence, značení a terminologie.

**4.1** V GUM je standardní nejistota spojená s odhadem  $y$  měřené veličiny  $Y$  psána jako  $u_c(y)$ . Spodní index “c”, značená “kombinovaná” standardní nejistota, je považován za nadbytečný a není používán v tomto dokumentu. (Viz JCGM 101:2008 4.10).

**4.2** Výraz psaný jako  $A =: B$  znamená, že  $B$  je definováno pomocí  $A$ .

**4.3** Neexistuje-li prostor pro omyl, bude použit symbol  $u$ , spíše než  $u(y)$ , pro jednoduchost značení. Rozšířená nejistota  $U$  se obecně bere jako  $U = ku$  užitím faktoru rozšíření  $k = 2$ ; hodnota  $k$  je explicitně udána, existuje-li prostor pro omyl.

**4.4** Vlastnost, která je předmětem zájmu (měřená veličina), se považuje za náhodnou proměnnou  $Y$  s možnými hodnotami  $\eta$ . Je-li  $Y$  měřena, vyhodnocení naměřených dat dá naměřenou hodnotu veličiny  $\eta_m$ , která bude brána za realizaci pozorovatelné náhodné proměnné  $Y_m$ . Obecně se naměřená hodnota  $\eta_m$  bude lišit od  $Y$  o neznámou chybu  $E$ , která, řekněme, závisí na náhodných a systematických vlivech.

**4.5** Toleranční interval stanoví dovolené hodnoty měřené veličiny  $Y$ . Rozhodnutí o posouzení shody je založeno na naměřené hodnotě  $\eta_m$  a vztahu  $\eta_m$  k definovanému intervalu přijetí.

**4.6** Znalost veličin  $Y$  a  $Y_m$  je podchycena a zprostředkována podmíněnými PDF, jejichž tvary závisí na dostupných informacích. Podmíněné PDF jsou psány se svislou čarou, s informací napravo od čáry považovanou za danou. PDF

pro měřenou veličinu  $Y$  před měřením je  $g_{Y|I}(\eta|I)$ , kde symbol  $I$  značí apriorní (počáteční) informaci.

**4.7** Po měření předmětné vlastnosti, které poskytne pozorovanou naměřenou hodnotu  $\eta_m$ , PDF po měření  $Y$  je  $g_{Y|\eta_m, I}(\eta|\eta_m, I)$ .

**4.8** Analogické PDF pro možné hodnoty  $\eta_m$  výstupní veličiny  $Y_m$  měřicího systému jsou (a),  $g_{Y_m|I}(\eta_m|I)$ , skrytě zahrnující víru v možné naměřené hodnoty při existenci pouze apriorní informace  $I$ , a (b),  $g_{Y_m|\eta, I}(\eta_m|\eta, I)$ , analogická PDF, když, spolu s apriorní informací  $I$ , má měřená veličina předpokládanou danou pravou hodnotu  $Y = \eta$ .

**4.9** V zájmu stručnosti je v tomto dokumentu explicitní uvedení dané apriorní informace  $I$  většinou vynecháno. Také PDF pro  $Y$  a  $Y_m$  jsou vyjádřeny pomocí symbolů  $g$  a  $h$  respektive, použitím následujícího značení, ve kterém jsou spodní indexy výrazně potlačeny:

— Pro znalost  $Y$  před měřením,

$$g_{Y|I}(\eta|I) =: g_0(\eta);$$

— Pro znalost měřené veličiny  $Y$  po měření,

$$g_{Y|\eta_m, I}(\eta|\eta_m, I) =: g(\eta|\eta_m);$$

— Znalost možných naměřených hodnot, jeli dána pouze apriorní informace  $I$ ,

$$g_{Y_m|I}(\eta_m|I) =: h_0(\eta_m);$$

— Znalost  $Y_m$  za předpokladu, že, spolu s informací  $I$ , je dána hodnota  $Y = \eta$  měřené veličiny,

$$g_{Y_m|\eta, I}(\eta_m|\eta, I) =: h(\eta_m|\eta).$$

Tyto PDF nejsou nezávislé, jejich vztah je dán Bayesovým teorémem (viz odstavec 6.2.)

**4.10** Podle Usnesení 10 22. konference CGPM (2003) “. . .symbol pro desetinnou značku je buď tečka na řádku nebo čárka na řádku . . .”. JCGM se rozhodl ve svých dokumentech v angličtině zvolit tečku na řádku.

## 5 Toleranční meze a toleranční intervaly

### 5.1 Měření v posuzování shody

**5.1.1** Uvažujme situaci, kdy vlastnost předmětu zájmu, jako je chyba indikace voltmetru, je měřena za účelem rozhodnutí, zda předmět splňuje či nespĺňuje stanovený požadavek. Taková zkouška shody zahrnuje sled tří operací:

- měření vlastnosti zájmu;
- porovnání výsledku měření se stanoveným požadavkem;
- rozhodnutí o následné akci.

**5.1.2** V praxi, v okamžiku, kdy byl výsledek měření získán, jsou operace porovnání/rozhodnutí typicky realizovány použitím předem vytvořeným a ustanoveným *rozhodovacím pravidlem* (viz 3.3.12), které závisí na výsledku měření, na stanoveném požadavku a na důsledcích nesprávného rozhodnutí.

**5.1.3** Návod týkající se formulace rozhodovacího pravidla je k dispozici. ISO 14253-1 [21] a ASME B89.7.3.1 [2] poskytují návody pro dokumentaci vybraného rozhodovacího pravidla a pro popis role nejistoty měření při nastavení mezí přijetí. Tyto dokumenty se zabývají rozhodovacími pravidly, které zahrnují dvě nebo více možných rozhodnutí a binární rozhodovací pravidlo, kterým se zabývá tento dokument, obsahují jako zvláštní případ.



**5.1.4** Měření prováděné jako součást posuzování shody je navrhováno tak, aby byla získána informace dostatečná k tomu, aby umožnila provedení rozhodnutí s přijatelnou úrovní rizika. Vhodná strategie měření vyváží náklady spojené se snížením nejistoty měření v porovnání s přínosem jistější znalosti pravé hodnoty měřené veličiny.

**5.1.5** Inspekční měření spolu s příslušným rozhodovacím pravidlem je tak úzce spojeno s takovými záležitostmi jako náklady a rizika. Jako takový není často návrh uspokojivého posouzení shody čistě technická záležitost. Je-li cílem minimalizovat náklady, pak při daném ekonomickém modelu lze problém redukovat na přímý výpočet.

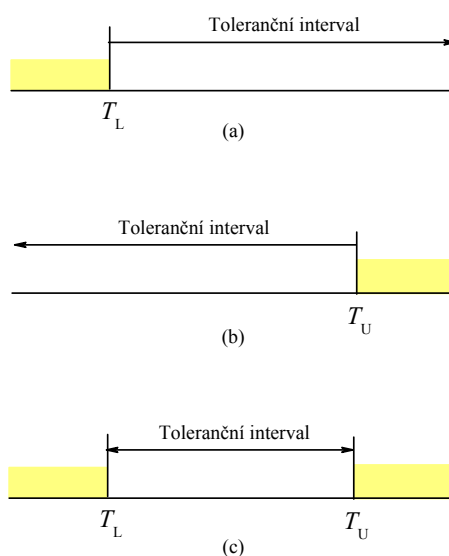
## 5.2 Dovolené a nedovolené hodnoty: toleranční intervaly

**5.2.1** V tomto dokumentu se stanovené požadavky pro měřenou veličinu zájmu skládají z limitních hodnot nazvaných toleranční meze, které oddělují intervaly dovolených hodnot měřené veličiny od intervalů nedovolených hodnot [22]. Intervaly dovolených hodnot nazývané toleranční intervaly jsou dvojího druhu:

- jednostranný toleranční interval s buď horní nebo spodní mezí;
- dvoustranný toleranční interval, který má současně horní a spodní toleranční mez.

V obou případech je předmět ve shodě se stanoveným požadavkem, jestliže pravá hodnota měřené veličiny leží uvnitř tolerančního intervalu a jinak nevyhovuje. Výše uvedené toleranční intervaly jsou ilustrovány na Obrázku 2.

**5.2.2** Zdánlivě jednostranné toleranční intervaly často v sobě skrývají další meze, z fyzikálních či teoretických důvodů, které nejsou explicitně uvedeny [22]. Takové toleranční intervaly jsou ve své podstatě dvoustranné, mající jednu stanovenou mez a jednu implicitní mez; viz příklady 4 a 5 níže.



**Obrázek 2 – Toleranční intervaly. (a) Jednostranný interval s jednoduchou spodní toleranční mezí  $T_L$ ; (b) jednostranný interval s jednoduchou horní toleranční mezí  $T_U$ ; (c) dvoustranný interval se spodní a horní toleranční mezí. Rozdíl  $T_U - T_L$  se nazývá tolerance.**

**POZNÁMKA 1** V některých případech jako je bezpečnost potravin nebo ochrana životního prostředí může stanovení tolerančních mezí v měřeních pro posuzování shody zahrnovat nejistoty, které souvisí s obtížností posouzení důsledků nesprávných rozhodnutí [29]. Podobný problém v analýze spolehlivosti nazývaný nejistota úplnosti souvisí s neanalyzovanými příspěvky k riziku [31].

**POZNÁMKA 2** Záležitosti jako nejistota úplnosti nemají žádný vztah k nejistotě měření spojené s odhadem měřené veličiny, který je výsledkem inspekčního měření. V tomto dokumentu se toleranční meze berou jako pevné konstanty.

### 5.3 Příklady tolerančních mezí

#### PŘÍKLAD 1 Jednoduchá horní toleranční mez

Závěrné napětí  $V_b$  pro určité typy Zenerových diod je stanoveno tak, že nesmí být větší než  $-5,4$  V. U vyhovující diody leží  $V_b$  v otevřeném intervalu  $V_b \leq -5,4$  V.

#### PŘÍKLAD 2 Jednoduchá spodní toleranční mez

U kovové nádoby na nealkoholické nápoje se požaduje, aby měla pevnost v protlačení  $B$  ne menší než 490 kPa. Vyhovující hodnoty  $B$  leží v otevřeném intervalu  $B \geq 490$  kPa.

#### PŘÍKLAD 3 Explicitní horní a spodní toleranční meze

Závaží 1 kg třídy OIML  $E_1$  [25] má specifikaci maximální dovolené chyby (MPE) 500  $\mu\text{g}$ . To znamená, že hmotnost  $m$  závaží je stanovena tak, že nesmí být menší než 0,999 999 5 kg a větší než 1,000 000 5 kg. Vyhovující závaží 1 kg je takové, u něhož je chyba hmotnosti  $E = m - m_0$  s  $m_0 = 1$  kg leží v intervalu  $-500 \mu\text{g} \leq E \leq 500 \mu\text{g}$ .

#### PŘÍKLAD 4 Explicitní horní a implicitní spodní toleranční meze

Regulace v oblasti životního prostředí vyžaduje, aby hmotnostní koncentrace  $X$  rtuti v toku průmyslových odpadních vod nebyla vyšší než 10 ng/L, což je explicitní horní toleranční mez. Protože však hmotnostní koncentrace nemůže být menší než nula, je tady implicitní spodní toleranční mez 0 ng/L. Vzorek odpadních vod je v souladu s touto regulací, leží-li hmotnostní koncentrace rtuti ve vzorku v intervalu  $0 \text{ ng/L} \leq X \leq 10 \text{ ng/L}$ .

#### PŘÍKLAD 5 Explicitní spodní a implicitní horní toleranční meze

U práškového benzoátu sodného používaného jako konzervační látka do potravin je požadována čistota  $P$ , vyjádřená jako hmotnostní zlomek v suchém stavu v procentech, ne menší než 99,0 %, což je explicitní spodní toleranční mez. Tato čistota však nemůže být větší než 100 %, což je implicitní horní toleranční mez. Vyhovující vzorek benzoátu sodného je takový, u kterého čistota vzorku leží v intervalu  $99,0 \% \leq P \leq 100 \%$ .

## 6 Znalost měřené veličiny

### 6.1 Pravděpodobnost a informace

**6.1.1** V měřeních prováděných jako součást posuzování shody se znalost předmětné vlastnosti (měřené veličiny) modeluje pomocí podmíněné funkce hustoty pravděpodobnosti (PDF), jejíž tvar závisí na dostupných informacích. Takové informace mají vždy dvě složky: tu, která je k dispozici před provedením měření (nazývaná apriorní informace), a přídatnou informaci poskytnutou tímto měřením [38].

**6.1.2** PDF pro předmětnou vlastnost (měřenou veličinu) obsahuje a vyjadřuje víru v její možné hodnoty při dané úrovni znalostí. Málo známá měřená veličina má obecně širokou PDF, ve vztahu k požadavkům posuzování shody, ukazující na široký interval možných hodnot kompatibilních s touto skrovnou informací. Provedení měření poskytne čerstvou informaci, která může posloužit k zostření této PDF a k zúžení intervalu možných hodnot měřené veličiny.

**6.1.3** Účinkem měření je tak aktualizace úrovně znalostí před měřením, což vytváří úroveň znalostí po měření (neboli a posterior), která zahrnuje naměřená data. Pravidlo pro tuto transformaci se nazývá Bayesův teorém a odpovídající základní matematický rámec je znám jako bayesovská teorie pravděpodobnosti. V tomto dokumentu jsou výsledky této teorie použity bez detailního výkladu či důkazů. K dispozici je rozsáhlá literatura; viz, například, odkazy [4, 5, 16, 26, 27, 39].

### 6.2 Bayesův teorém

**6.2.1** V posuzování shody je měřitelná vlastnost  $Y$  předmětu, o kterou se zajímáme, považována za náhodnou proměnnou s možnými hodnotami označenými jako  $\eta$ . Před měřením  $Y$ , je rozumná víra v její možné hodnoty charakterizována apriorní (před měřením) PDF  $g_0(\eta)$  jejíž tvar je nezávislý na měřícím systému (viz odstavec 4.9).

**6.2.2** Apriorní PDF  $g_0(\eta)$  je často volena na základě znalostí získaných předchozími měřeními podobných předmětů. Metody přiřazování apriorních PDF předmětné vlastnosti jsou diskutovány v Příloze B.

**6.2.3** Při typickém inspekčním měření je veličina  $Y$  měřena použitím postupu, který je navrhován tak, aby poskytl dostatek informací pro posouzení shody se stanoveným požadavkem.

POZNÁMKA 1 Pro veličinu a pro náhodnou proměnnou, která ji reprezentuje, je použit stejný symbol. (viz [GUM 4.1.1 Poznámka 1]).

POZNÁMKA 2 Návod pro volbu PDF v některých běžných situacích je uveden v JCGM 101:2008 a Příloze B.

**6.2.4** Výstupem měřicího systému je veličina považovaná za náhodnou proměnnou  $Y_m$  s možnými hodnotami označovanými jako  $\eta_m$ . Změření  $Y$  poskytuje jednu určitou realizaci, *naměřenou hodnotu veličiny*  $\eta_m$  (viz odstavce 3.2.6 a 4.4), a výslednou následnou (po měření) PDF pro  $Y$ , je-li k dispozici tato nová informace, píšeme jako

$$g(\eta|Y_m = \eta_m) =: g(\eta|\eta_m).$$

**6.2.5** Vztah apriorní a následné PDF je dán Bayesovým teorémem

$$g(\eta|\eta_m) = C g_0(\eta) h(\eta_m|\eta), \quad (1)$$

kde při dané naměřené hodnotě  $\eta_m$  je  $C$  konstanta vybraná tak, že  $\int_{-\infty}^{\infty} g(\eta|\eta_m) d\eta = 1$ . Člen  $h(\eta_m|\eta)$  ve výrazu (1) je PDF pro možné hodnoty  $Y_m$  při dané určité hodnotě  $Y = \eta$  měřené veličiny.

**6.2.6** Vyjádřena jako funkce  $\eta$  pro změřenou hodnotu  $\eta_m$ , nazývá se tato PDF  $h(\eta_m|\eta)$  věrohodností  $\eta$  při daném  $\eta_m$ , a píše se jako

$$h(\eta_m|\eta) =: \mathcal{L}(\eta; \eta_m).$$

Na měření lze pohlížet jako na stimul a odezvu nebo jako na vstup a výstup. Z tohoto pohledu věrohodnostní funkce  $\mathcal{L}(\eta; \eta_m)$  charakterizuje rozdělení pravděpodobných stimulů či vstupů (hodnoty  $\eta$ ), které mohly způsobit pozorované odezvy či výstupy (naměřená data  $\eta_m$ ).

**6.2.7** Tvar věrohodnostní funkce bude záviset jak na specifickém problému měření a měřicím systému tak, jak je to popsáno v matematickém modelu, tak na dalších relevantních informacích jako jsou historická data, kalibrace přístroje a výsledky měření na kalibrovaných artefaktech nebo certifikovaných referenčních materiálech a na zkušenostech s podobnými systémy. V mnoha případech praktického zájmu lze věrohodnostní funkci charakterizovat pomocí normálního (Gaussova) rozdělení.

**6.2.8** Bayesův teorém ukazuje, jak se následný stav znalostí (po měření) odvozuje z kombinace apriorní informace (před měřením) podchycené v apriorním rozdělení a informace poskytnuté měřením reprezentované věrohodnostní funkcí.

**6.2.9** V mnoha případech je měřicí systém nasazen za účelem doplnění relativně chudé apriorní znalosti měřené veličiny přesnou informací z měření. V takovém případě je PDF následné úrovně znalostí (po měření) v podstatě definována věrohodnostní funkcí (podchycující informaci z měření), tj.,

$$g(\eta|\eta_m) = C h(\eta_m|\eta)$$

v dobré aproximaci, kde  $C$  je konstanta.

## 6.3 Souhrnná informace

### 6.3.1 Nejlepší odhad a standardní nejistota

Výsledek měření je často prezentován tak, že se udá odhad měřené veličiny a parametr, který charakterizuje rozptyl pravděpodobných hodnot veličiny kolem tohoto odhadu. V tomto dokumentu se za odhad  $y$  vlastnosti  $Y$  bere *očekávaná hodnota* (viz 3.1.5)  $E(Y|\eta_m)$ . Za příslušný disperzní parametr  $u(y) = u$  nazývaný standardní nejistota se

bere *směrodatná odchylka* (viz 3.1.7)  $Y$ , kladná odmocnina *rozptylu* (viz 3.1.6)  $V(Y|\eta_m)$ .  $E(Y|\eta_m)$  a  $V(Y|\eta_m)$  jsou dány takto

$$E(Y|\eta_m) = y = \int_{-\infty}^{\infty} \eta g(\eta|\eta_m) d\eta, \quad V(Y|\eta_m) = u^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\eta - y)^2 g(\eta|\eta_m) d\eta.$$

**6.3.1.1** Standardní nejistota  $u$  charakterizuje rozptyl  $Y$  kolem odhadu  $y$ . Je-li PDF pro  $Y$  s jedním maximem (unimodální) a symetrická, je odhad  $y$  též nejpravděpodobnější hodnotou  $Y$ , tj. modem rozdělení.

**6.3.1.2** U měření analyzovaného podle JCGM 100:2010 (GUM) poskytuje vyhodnocení naměřených dat odhad měřené veličiny (změřenou hodnotu veličiny)  $\eta_m$  a příslušnou standardní nejistotu  $u_m$ . Předpokládá se, že apriorní informace je natolik chudá, že následnou PDF  $g(\eta|\eta_m)$  lze stručně vyjádřit pomocí odhadu  $y = \eta_m$  a příslušné standardní nejistoty  $u = u_m$  (viz odstavec 7.6.1).

## 6.3.2 Intervaly pokrytí

**6.3.2.1** Po provedení měření je pravděpodobnost toho, že  $Y$  není větší než daná hodnota  $a$

$$\Pr(Y \leq a|\eta_m) = G(a) = \int_{-\infty}^a g(\eta|\eta_m) d\eta,$$

kde  $G(z) = \int_{-\infty}^z g(\eta|\eta_m) d\eta$  je rozdělovací funkce  $Y$ , je-li udáno  $\eta_m$ .

**6.3.2.2** Odtud plyne, že pravděpodobnost  $p$ , že  $Y$  leží v intervalu  $[a, b]$ , s  $a < b$ , je

$$p = \Pr(a \leq Y \leq b|\eta_m) = \int_a^b g(\eta|\eta_m) d\eta = G(b) - G(a). \quad (2)$$

**6.3.2.3** Interval tvaru  $[a, b]$  se nazývá interval pokrytí pro  $Y$  a  $p$  je s tím spojená pravděpodobnost pokrytí. Návod na konstrukci intervalu pokrytí s požadovanou pravděpodobností pokrytí včetně případu diskrétní aproximace rozdělovací funkce získaný metodou Monte Carlo je uveden v JCGM 101:2008.

**6.3.2.4** je-li PDF pro  $Y$  symetrická a unimodální, pak důležitý a široce používaný interval pokrytí má svůj střed na nejlepším odhadu  $y$  s délkou rovnou určitému násobku standardní nejistoty  $u$ . GUM definuje další míru nejistoty nazvanou rozšířená nejistota,  $U$ , kterou získáme vynásobením standardní nejistoty  $u$  faktorem rozšíření  $k$ :

$$U = ku. \quad (3)$$

**6.3.2.5** Faktor rozšíření je vybrán tak, abychom dosáhli požadované pravděpodobnosti pokrytí spojené s intervalem pokrytí  $[y - U, y + U]$ . Vztah mezi  $k$  a příslušnou pravděpodobností pokrytí závisí na PDF pro  $Y$ .

POZNÁMKA 1 Interval pokrytí ve tvaru  $[y - U, y + U]$  se někdy nazývá interval nejistoty, jako např. v ISO 10576-1:2003 3.7 [22].

POZNÁMKA 2 Je-li PDF pro  $Y$  asymetrická, je vhodnější určit nejkratší interval pokrytí pro danou pravděpodobnost pokrytí. Viz JCGM 101:2008 5.3.4 pro návod k tomuto výpočtu.

## 7 Pravděpodobnost shody se stanovenými požadavky

### 7.1 Obecné pravidlo pro výpočet pravděpodobnosti shody

**7.1.1** Určitý předmět vyhovuje stanovenému požadavku, leží-li pravá hodnota příslušné vlastnosti  $Y$  v tolerančním intervalu. Znalost  $Y$  je dána PDF  $g(\eta|\eta_m)$ , takže výrok o shodě má vždy charakter dedukce (úsudku), která je správná pouze s určitou pravděpodobností. Označíme-li soubor dovolených (vyhovujících) hodnot  $Y$   $C$ , je pravděpodobnost shody značená jako  $p_c$  dána takto

$$p_c = \Pr(Y \in C|\eta_m) = \int_C g(\eta|\eta_m) d\eta. \quad (4)$$

**7.1.2** Výraz (4) je obecným pravidlem pro výpočet pravděpodobnosti, že určitý předmět vyhovuje stanovenému požadavku na základě měření odpovídající vlastnosti tohoto předmětu. Máme-li dvoustranný toleranční interval pro měřenou veličinu  $Y$ , např. se spodní mezí  $T_L$  a horní mezí  $T_U$ ,  $C = [T_L, T_U]$  je pravděpodobnost shody

$$p_c = \int_{T_L}^{T_U} g(\eta|\eta_m) d\eta.$$

**7.1.3** Protože předmět buď vyhovuje nebo nevyhovuje požadavku, je pravděpodobnost, že nevyhovuje, rovna

$$\bar{p}_c = 1 - p_c.$$

## 7.2 Pravděpodobnosti shody s normálními PDF

**7.2.1** Pravděpodobnost shody závisí na stavu znalostí o měřené veličině  $Y$  jak je podchycena a zprostředkována pomocí PDF  $g(\eta|\eta_m)$ . V mnoha případech je rozumné charakterizovat znalost  $Y$  pomocí *normálního rozdělení* (viz 3.1.4) a tuto pravděpodobnost je možné vypočítat. Je-li apriorní rozdělení normální a měřicí systém (tj. věrohodnostní funkce) je charakterizován normálním rozdělením, pak je rozdělení  $g(\eta|\eta_m)$  též normální.

**7.2.2** Obecněji, je-li věrohodnostní funkce charakterizována normálním rozdělením a apriorní informace je chudá, pak bude následná PDF (po měření) přibližně normální. V takovém případě  $g(\eta|\eta_m)$  lze přiměřeně charakterizovat normálním rozdělením s očekávanou (střední) hodnotou a směrodatnou odchylkou, které jsou dány nejlepším odhadem  $y$  a standardní nejistotou  $u$  vypočtenou jako v odstavci 6.3.1.

POZNÁMKA 1 Normální rozdělení je úplně určeno svou očekávanou (střední) hodnotou a směrodatnou odchylkou.

POZNÁMKA 2 Některé vlastnosti normálních PDF jsou posuzovány v Příloze A.

**7.2.3** Z důvodu všeobecné známosti a širokého použití budou normální PDF použity pro ilustraci výpočtu pravděpodobností shody v mnoha příkladech v tomto dokumentu. Takové výpočty lze rozšířit i na případ, kdy malý počet indikací (měření) dává vznik rozšířenému a posunutému  $t$ -rozdělení (viz JCGM 101:2008 6.4.9).

**7.2.4** Předpokládejme, že PDF  $g(\eta|\eta_m)$  pro měřenou veličinu  $Y$  je dána (nebo je dobře aproximována) normálním rozdělením určeným nejlepším odhadem (očekávanou hodnotou)  $y$  a standardní nejistotou (směrodatnou odchylkou)  $u$ . Pak je  $g(\eta|\eta_m)$  dána vztahem

$$g(\eta|\eta_m) = \frac{1}{u\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\eta - y}{u}\right)^2\right] =: \varphi(\eta; y, u^2). \quad (5)$$

**7.2.5** Obecně odhad  $y$  závisí na  $\eta_m$ , tj.  $y = y(\eta_m)$ . Je-li znalost  $Y$  před měřením chudá, pak obvykle  $y \approx \eta_m$ ; viz odstavec A.4.4 s příkladem, kdy to není tento případ.

**7.2.6** Z kroků, které vedly k výrazu (2), plyne, že pravděpodobnost, že  $Y$  leží v intervalu  $[a, b]$ , je-li dána PDF (5), je

$$\Pr(a \leq Y \leq b|\eta_m) = \Phi\left(\frac{b - y}{u}\right) - \Phi\left(\frac{a - y}{u}\right), \quad (6)$$

kde  $y = y(\eta_m)$  a

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp(-t^2/2) dt$$

je funkce normalizovaného normálního rozdělení (viz Přílohu A).

## 7.3 jednostranné toleranční intervaly s normálními PDF

### 7.3.1 Jednoduchá spodní toleranční mez

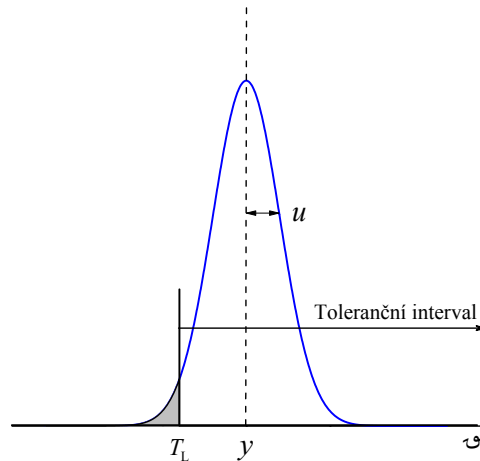
Obrázek 3 znázorňuje jednostranný toleranční interval s jednoduchou spodní toleranční mezí  $T_L$ . Vyhovující hodnoty předmětné vlastnosti  $Y$  leží v intervalu  $\eta \geq T_L$ . Znalost  $Y$  po provedení inspekčního měření je zprostředkována

normální PDF, která je přeložena přes toleranční interval. Nejlepší odhad  $y$  leží v tolerančním intervalu; stínovaná oblast nalevo od  $T_L$  indikuje pravděpodobnost, že daný předmět nevyhovuje specifikaci. Z výrazu (6) s  $a = T_L$ ,  $b \rightarrow \infty$ , a vezmeme-li v úvahu, že  $\Phi(\infty) = 1$ , pravděpodobnost shody je

$$p_c = 1 - \Phi\left(\frac{T_L - y}{u}\right). \quad (7)$$

Protože  $\Phi(t) + \Phi(-t) = 1$ , lze pravděpodobnost (7) psát takto

$$p_c = \Phi\left(\frac{y - T_L}{u}\right). \quad (8)$$

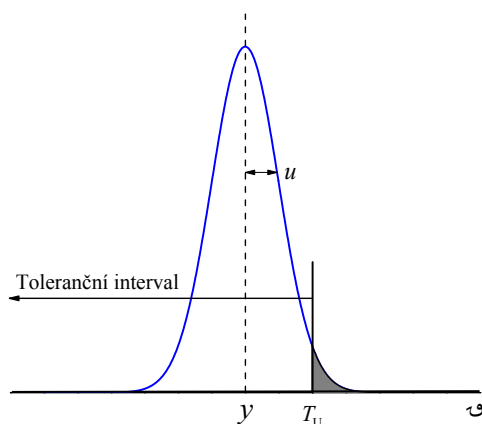


**Obrázek 3** – Toleranční interval s jednoduchou spodní toleranční mezí  $T_L$ . Znalost veličiny  $Y$  (měřitelná vlastnost zájmu) po provedení měření je charakterizována normální PDF nejlepším odhadem  $y$  a příslušnou standardní nejistotou  $u$ . Vyhovující hodnoty  $Y$  leží v intervalu  $\eta \geq T_L$ .

### 7.3.2 Jednoduchá horní toleranční mez

Obrázek 4 znázorňuje normální PDF vepsanou do jednoduchého tolerančního intervalu s jednoduchou horní toleranční mezí  $T_U$ . Vyhovující hodnoty předmětné vlastnosti  $Y$  leží v intervalu  $\eta \leq T_U$ . V tomto případě stínovaná oblast napravo od  $T_U$  představuje pravděpodobnost, že předmět nevyhovuje specifikaci. Z výrazu (6), s  $a \rightarrow -\infty$ ,  $b = T_U$ , a vezmeme-li v úvahu, že  $\Phi(-\infty) = 0$ , pravděpodobnost shody je

$$p_c = \Phi\left(\frac{T_U - y}{u}\right). \quad (9)$$



Obrázek 4 – Stejně jako v Obrázku 3, tady s jednoduchou horní toleranční mezí  $T_U$ . Vyhovující hodnoty  $Y$  leží v intervalu  $\eta \leq T_U$ .

### 7.3.3 Obecný přístup k jednoduchým tolerančním mezím

Pravděpodobnosti (8) a (9) mají stejný tvar a lze je psát jako

$$p_c = \Phi(z), \quad (10)$$

kde  $z = (y - T_L)/u$  pro spodní mez a  $z = (T_U - y)/u$  pro horní mez. V obou případech je  $p_c$  větší než nebo rovná  $1/2$  pro odhad  $y$  v tolerančním intervalu ( $z \geq 0$ ) a menší než  $1/2$  jinak. Tabulka 1 uvádí hodnoty  $z$  pro několik hodnot pravděpodobnosti shody  $p_c$ .

**Tabulka 1 – Shodné ( $p_c$ ) a neshodné ( $\bar{p}_c = 1 - p_c$ ) pravděpodobnosti pro jednostranné toleranční intervaly a normální PDF. Pro spodní mez  $z = (y - T_L)/u$ ; pro horní mez  $z = (T_U - y)/u$ . V obou případech je  $z \geq 0$  pro odhad  $y$  v tolerančním intervalu**

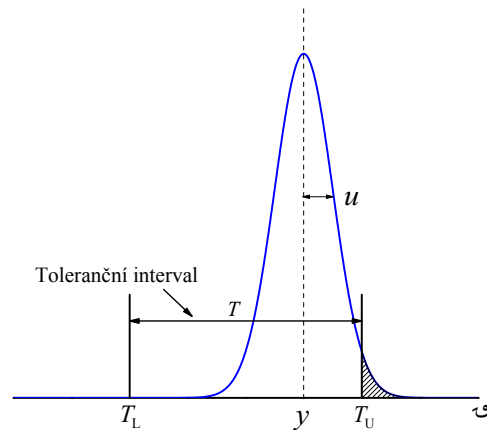
$p_c$	$\bar{p}_c$	$z$
0,80	0,20	0,84
0,90	0,10	1,28
0,95	0,05	1,64
0,99	0,01	2,33
0,999	0,001	3,09

**PŘÍKLAD 1** Je změřeno závěrné napětí  $V_b$  Zenerovy diody dávající nejlepší odhad  $v_b = -5,47$  V s příslušnou standardní nejistotou  $u = 0,05$  V. Specifikace diody vyžaduje  $V_b \leq -5,40$  V, což je horní mez závěrného napětí. Pak  $z = [-5,40 - (-5,47)]/0,05 = 1,40$  a z výrazu (10),  $p_c = \Phi(1,40) = 0,92$ . Je tedy 92 % pravděpodobnost, že tato dioda vyhovuje specifikaci.

**PŘÍKLAD 2** Kovová nádoba je destruktivně zkoušena použitím tlakové vody při měření její pevnosti v protlačení  $B$ . Měření poskytlo nejlepší odhad  $b = 509,7$  kPa s příslušnou standardní nejistotou  $u = 8,6$  kPa. Specifikace nádoby požaduje  $B \geq 490$  kPa, což je spodní mez pevnosti v protlačení. Pak  $z = (509,7 - 490)/8,6 = 2,3$  a z výrazu (10),  $p_c = \Phi(2,3) = 0,99$ . Je tedy 99 % pravděpodobnost, že nádoba vyhovovala specifikaci před provedením destruktivní zkoušky.

## 7.4 Dvoustranné toleranční intervaly s normálními PDF

Obrázek 5 znázorňuje dvoustranný toleranční interval s tolerančními mezemi  $T_L$  a  $T_U$  a délkou  $T = T_U - T_L$ , která definuje toleranci  $T$ . Jako dříve předpokládáme, že znalost měřené veličiny  $Y$  je zprostředkována normální PDF. Odhad  $y$  leží v tolerančním intervalu a je patrné, že zřetelná část pravděpodobnosti leží v oblasti  $\eta > T_U$  za horní toleranční mezí.



Obrázek 5 – Stejně jako 3, zde s dvoustranným tolerančním intervalem. Délka  $T_U - T_L$  tohoto intervalu je rovna toleranci  $T$ . Vyhovující hodnoty  $Y$  leží v intervalu  $T_L \leq \eta \leq T_U$ .

Použitím výrazu (6) s  $b = T_U$  a  $a = T_L$  dostaneme pravděpodobnost shody

$$p_c = \Phi\left(\frac{T_U - y}{u}\right) - \Phi\left(\frac{T_L - y}{u}\right). \quad (11)$$

**PŘÍKLAD** Vzorek motorového oleje SAE Grade 40 má mít podle specifikace kinematickou viskozitu  $Y$  při  $100^\circ\text{C}$  ne menší než  $12,5 \text{ mm}^2/\text{s}$  a ne větší než  $16,3 \text{ mm}^2/\text{s}$ . Kinematická viskozita vzorku je změřena při  $100^\circ\text{C}$ , což poskytlo nejlepší odhad  $y = 13,6 \text{ mm}^2/\text{s}$  a příslušnou standardní nejistotu  $u = 1,8 \text{ mm}^2/\text{s}$ . Na základě výrazu (11) vytvoříme veličiny

$$(T_U - y)/u = (16,3 - 13,6)/1,8 = 1,5, \quad (T_L - y)/u = (12,5 - 13,6)/1,8 = -0,6,$$

takže

$$p_c = \Phi(1,5) - \Phi(-0,6) = 0,93 - 0,27 = 0,66.$$

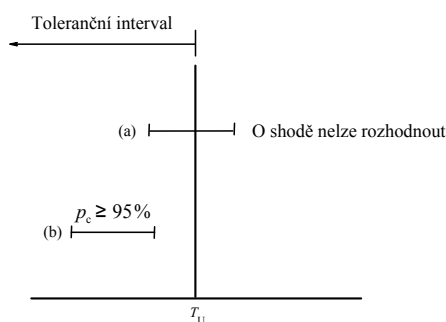
Je tedy 66 % pravděpodobnost, že vzorek motorového oleje vyhovuje specifikaci.

## 7.5 Pravděpodobnost shody a intervaly pokrytí

**7.5.1** Výsledek měření lze stručně vyjádřit udáním intervalu pokrytí s příslušnou pravděpodobností pokrytí (viz odstavec 6.3.2) spíše než pomocí explicitní PDF pro měřenou veličinu  $Y$ . V takovém případě lze učinit výrok o pravděpodobnosti shody porovnáním intervalu pokrytí s tolerančním intervalem. Jestliže interval pokrytí s pravděpodobností pokrytí  $p$  leží celý uvnitř tolerančního intervalu, pak  $p_c$  nemůže být menší než  $p$ . Tento poznatek je ilustrován na obrázku 6, který znázorňuje dva 95 % intervaly pokrytí v blízkosti horní toleranční meze.

**7.5.2** Interval (a) přesahuje mimo toleranční mez a bez znalosti tvaru PDF pro  $Y$  nelze definitivní výrok o pravděpodobnosti shody učinit.





**Obrázek 6** – Dva 95 %-ní intervaly pokrytí pro měřenou veličinu  $Y$  v blízkosti horní toleranční meze  $T_U$ .  
Interval (a) přesahuje mimo toleranční mez a o shodě nemůže být rozhodnuto bez znalosti PDF pro  $Y$ .  
Interval (b) leží celý uvnitř tolerančního intervalu; pro tento interval  $p_c \geq 95\%$ .

**7.5.3** Všechny hodnoty v intervalu (b) jsou menší než toleranční mez a existují vyhovující hodnoty  $Y$ , které do tohoto intervalu nepatří, takže  $p_c \geq 95\%$ .

**7.5.4** Obecně jestliže  $[\eta_{\text{low}}, \eta_{\text{high}}]$  je interval pokrytí for  $Y$  s pravděpodobností pokrytí  $p$ , pak

- pro jednoduchou horní toleranční mez  $T_U$ ,  $p_c \geq p$ , jestliže  $\eta_{\text{high}} \leq T_U$ ;
- pro jednoduchou spodní toleranční mez  $T_L$ ,  $p_c \geq p$ , jestliže  $\eta_{\text{low}} \geq T_L$ ;
- pro dvoustranný interval s horní a spodní toleranční mezí  $T_U$  a  $T_L$ ,  $p_c \geq p$ , jestliže  $\eta_{\text{low}} \geq T_L$  a  $\eta_{\text{high}} \leq T_U$ .

**POZNÁMKA 1** Porovnání intervalu pokrytí pro předmětnou vlastnost s intervalem dovolených hodnot je základem pro rozhodnutí o shodě se specifikací, jak je popsáno v ISO 10576-1 [22].

**POZNÁMKA 2** Je-li dána PDF pro  $Y$ , pak lze pravděpodobnost pokrytí vždy vypočítat. PDF pro měřenou veličinu má vyšší informační obsah než interval pokrytí s příslušnou pravděpodobností pokrytí.

**POZNÁMKA 3** Provádí-li se posouzení shody měřicího přístroje — zejména je-li posouzení regulováno specifickými normami — nemusí být definice měřené veličiny a v důsledku toho i vyhodnocení nejistoty jednoduché a může si to vyžádat zvláštní pozornost.

## 7.6 Index způsobilosti měření $C_m$

**7.6.1** Uvažujme případ, kdy je apriorní informace tak chudá, že znalost možných hodnot měřené vlastnosti  $Y$  můžeme považovat za dodanou výhradně provedeným měřením. Jestliže v takovém případě předpokládáme, že rozdělení pro  $Y$  má tvar normální PDF  $g(\eta|\eta_m) = \varphi(\eta; y, u^2)$ , pak  $y \approx \eta_m$  a  $u \approx u_m$  (viz odstavec A.4.4.3). V následujících pododstavcích se předpokládá, že tento případ nastal, a výsledek měření je stručně vyjádřen pomocí 2 parametrů  $(\eta_m, u_m)$ , za které se bere očekávaná hodnota a směrodatná odchylka normální PDF.

**7.6.2** Parametr, který charakterizuje kvalitu měření relativně ve vztahu k požadavku stanoveném tolerancí, se nazývá *index způsobilosti měření* (viz 3.3.17) definovaný jako

$$C_m = \frac{T_U - T_L}{4u_m} = \frac{T}{4u_m} = \frac{T}{2U}, \quad (12)$$

kde  $U = 2u_m$  je rozšířená nejistota s faktorem pokrytí  $k = 2$ .

**7.6.3** Faktor 4 ve výrazu (12) je libovolný; tato konkrétní volba je motivována širokým používáním intervalu pokrytí  $[\eta_m - 2u_m, \eta_m + 2u_m]$  při oznamování výsledku měření. V případě, že  $g(\eta|\eta_m)$  je normální PDF, je pravděpodobnost pokrytí pro takový interval přibližně 95 %.

**7.6.4** Existuje úzká vazba mezi  $C_m$  a ostatními odvozenými parametry, které jsou používány k charakterizaci kvality měření v různých kontextech. Mezi nimi jsou měřicí poměr, pravidlo výrobce měřidla, poměr nejistot při zkoušce (TUR) [32] a poměr přesností při zkoušce (TAR) [1]. Takové parametry jsou obvykle udávány ve tvaru poměru jako pravidlo 10-ku-1 nebo TUR 4:1. Narazíte-li na taková pravidla, je třeba opatrnosti, protože jsou někdy nejednoznačně či neúplně definována. Definice (12), na druhé straně, nedává žádné pochybnosti, že výrok jako  $C_m \geq 4$  znamená, že  $u_m \leq T/16$ .

**7.6.5** Při kalibraci nebo ověřování měřicího přístroje je stanovený požadavek často vyjádřen pomocí *maximální dovolené chyby (indikace)* (viz 3.3.18). Takový požadavek znamená, že je-li tento přístroj použit k měření veličiny  $Y$ , musí chyba indikace ležet v intervalu definovaném horní a spodní mezí. V obvyklém případě symetrického intervalu  $[-E_{\max}, E_{\max}]$ , je tolerance rovna  $T = 2E_{\max}$  a index způsobilosti měření je

$$C_m = \frac{2E_{\max}}{2U} = \frac{E_{\max}}{U}.$$

V tomto výrazu je  $U$  rozšířená nejistota pro faktor pokrytí  $k = 2$  spojená s měřením chyby indikace přístroje.

## 7.7 Index způsobilosti měření a pravděpodobnost shody

**7.7.1** Pro normální PDF výraz (11) udává pravděpodobnost shody  $p_c$  pomocí určitého páru tolerančních mezí ( $T_L, T_U$ ) a určitého výsledku měření stručně vyjádřeného jako  $(y, u)$ . Vezmeme-li  $y = \eta_m$  a  $u = u_m$ , lze tento výraz přepsat do tvaru vhodného pro obecný problém měření definováním veličiny

$$\tilde{y} = \frac{\eta_m - T_L}{T}. \quad (13)$$

Pro odhad  $\eta_m$  v tolerančním intervalu leží  $\tilde{y}$  v intervalu  $0 \leq \tilde{y} \leq 1$ .

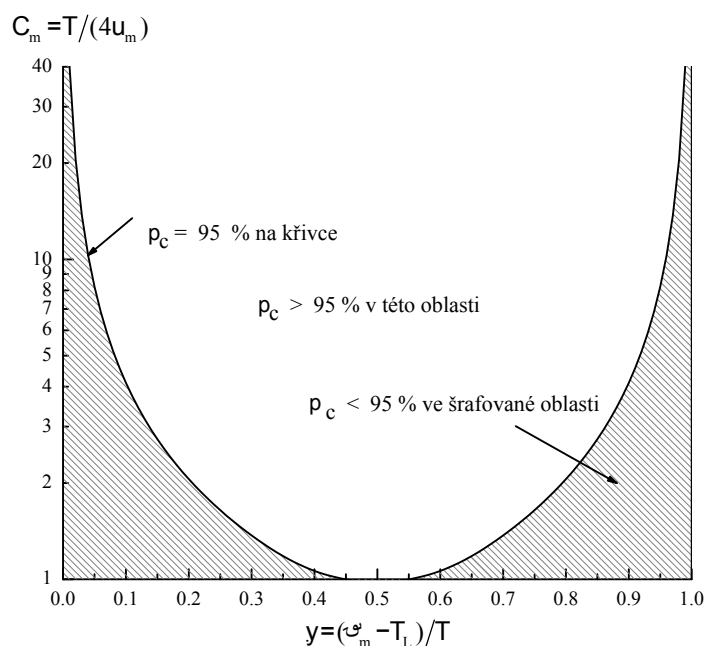
**7.7.2** Pro normální následnou PDF (po měření)  $\varphi(\eta; \eta_m, u_m^2)$ , lze pak výraz (11) psát použitím výrazů (12) a (13) takto

$$p_c = \Phi[4C_m(1 - \tilde{y})] - \Phi(-4C_m\tilde{y}) = p_c(\tilde{y}, C_m), \quad (14)$$

takže  $p_c$  je úplně určena dvěma veličinami  $\tilde{y}$  a  $C_m$ .

**7.7.3** Často nastává případ, že standardní nejistota  $u_m$  spojená s odhadem  $\eta_m$  má pevnou hodnotu, která závisí na konstrukci měřicího systému, ale je nezávislá na  $\eta_m$ . Můžeme, například, provést inspekci série vzorků vody s cílem stanovit u každého vzorku koncentraci rozpuštěné rtuti použitím měřicího postupu, který dává různé odhady, přičemž každý z nich má stejnou příslušnou standardní nejistotu  $u_m$ . V takovém případě je index způsobilosti měření  $C_m = T/4u_m$  zafixován a otázku, zda měřená vlastnost vyhovuje specifikaci s přijatelnou pravděpodobností nebo ne, lze rozhodnout na základě odhadu  $\eta_m$  použitím výrazů (13) a (14) s  $C_m$  zafixovaným.

POZNÁMKA O případu, kdy je standardní nejistota  $u_m$  úměrná odhadu  $\eta_m$ , je pojednáno v [13, Dodatek A].



**Obrázek 7 – Index způsobilosti měření  $C_m = T/(4u_m)$  versus  $\tilde{y} = (\eta_m - T_L)/T$ , znázorňující geometrické místo bodů s konstantní 95 %-ní pravděpodobností shody  $p_c$ . Tato křivka odděluje oblasti shody a neshody při 95 % úrovni spolehlivosti. Za následné rozdělení (po měření) pro měřenou veličinu  $Y$  se bere normální PDF  $\varphi(\eta; \eta_m, u_m^2)$ .**

**7.7.4** Existuje nekonečný počet párů  $(\tilde{y}, C_m)$ , které poskytují danou pravděpodobnost shody  $p_c$  přes výraz (14). Obrázek 7 ukazuje závislost  $C_m$  versus  $\tilde{y}$  podél křivky konstantní 95 %-ní pravděpodobnosti shody pro odhady  $\eta_m$  s tolerančním intervalem  $0 \leq \tilde{y} \leq 1$ . Křivka odděluje oblasti shody (nestínované) a neshody (stínované) při 95 %-ní úrovni spolehlivosti.

**7.7.5** Vodorovná osa na Obrázku 7 odpovídá  $C_m = 1$  neboli  $u_m = T/4$ . Pro tuto relativně velkou standardní nejistotu můžeme vidět, že  $p_c \geq 95\%$  je pro  $0.45 \leq \tilde{y} \leq 0.55$ . Požaduje-li se, aby měřená vlastnost vyhovovala specifikaci s alespoň 95 %-ní úrovni spolehlivosti, pak musí přijatelný odhad  $\eta_m$  ležet ve středních přibližně 10 % tolerančního intervalu.

## 8 Intervaly přijatelnosti

### 8.1 Meze přijatelnosti

**8.1.1** Rozhodnutí přijmout daný předmět jako vyhovující či odmítnout jako nevyhovující specifikaci je založeno na změřené hodnotě  $\eta_m$  vlastnosti předmětu ve vztahu k udanému rozhodovacímu pravidlu, které stanoví roli nejistoty měření při formulaci kritéria přijetí. Interval naměřených hodnot vlastnosti, jehož důsledkem je přijetí předmětu, se nazývá *interval přijetí* (viz 3.3.9) definovaný jednou nebo dvěma *mezemi přijetí* (viz 3.3.8).

**8.1.2** Jak je naznačeno v Úvodu, jsou meze přijetí a odpovídající rozhodovací pravidla vybírána s cílem zvládnout nežádoucí důsledky nesprávných rozhodnutí. Existuje řada široce používaných rozhodovacích pravidel, která lze snadno realizovat. Lze je aplikovat, je-li znalost předmětné vlastnosti stručně vyjádřena pomocí nejlepšího odhadu a odpovídajícího intervalu pokrytí. Dvě taková rozhodovací pravidla jsou popsána v následujících pododstavcích.

## 8.2 Rozhodovací pravidlo založené na jednoduchém přijetí

**8.2.1** Důležité a široce používané rozhodovací pravidlo je známo jako jednoduché přijetí [2] neboli sdílené riziko [20]. Podle takového pravidla výrobce a uživatel (spotřebitel) výsledku měření souhlasí, implicitně nebo explicitně, s přijetím jako vyhovujícího (a jinak s odmítnutím) předmětu, jehož vlastnost má naměřenou hodnotu v tolerančním intervalu. Jak alternativní název ‘sdílené riziko’ napovídá, s jednoduchým rozhodovacím pravidlem přijetí se výrobce a uživatel (nebo dodavatel a odběratel) podílejí rovným dílem na důsledcích nesprávných rozhodnutí.

**8.2.2** V praxi se v zájmu toho, aby se možnost nesprávných rozhodnutí podařilo udržet na úrovních přijatelných jak pro výrobce, tak pro uživatele, obvykle stanoví požadavek, že nejistota měření byla vzata v úvahu a shledána přijatelnou pro zamýšlený účel.

**8.2.3** Jedním z přístupů k takovým úvahám je požadovat, při daném odhadu měřené veličiny, aby příslušná rozšířená nejistota  $U$ , pro faktor pokrytí  $k = 2$ , musela vyhovovat vztahu  $U \leq U_{\max}$ , kde  $U_{\max}$  je vzájemně odsouhlasená maximální přijatelná rozšířená nejistota. Tento přístup lze ilustrovat na následujícím příkladu.

**PŘÍKLAD** V legální metrologii [40] se rozhodovací pravidlo založené na jednoduchém přijetí používá při ověřování měřicích přístrojů. Uvažujme takový přístroj, u kterého je požadována chyba indikace v intervalu  $[-E_{\max}, E_{\max}]$ . Přístroj je přijat jako vyhovující stanovenému požadavku, splňuje-li následující kritéria:

- (a) při měření kalibrovaného etalonu nejlepší odhad  $e$  chyby indikace  $E$  přístroje vyhovuje vztahu

$$|e| \leq E_{\max}, \text{ a}$$

- (b) rozšířená nejistota pro faktor pokrytí  $k = 2$  spojená s tímto odhadem  $e$  splňuje vztah

$$U \leq U_{\max} = E_{\max}/3.$$

Z pohledu indexu způsobilosti měření je kritérium (b) ekvivalentní požadavku, že  $C_m \geq 3$  (viz odstavec 7.6).

**8.2.4** Jiné v praxi používané rozhodovací pravidlo pro přijetí plyne z toho, co se nazývá “metoda přesnosti” popsané v IEC Návodu 115 [19]. V tomto přístupu se použije dobře charakterizovaná zkušební metoda a zdroje nejistoty jsou minimalizovány (a) použitím měřicích přístrojů s maximální dovolenou chybou v rámci stanovených mezí, (b) vlivy okolního prostředí jako je teplota a relativní vlhkost jsou udržovány ve stanovených mezích, (c) dobře dokumentovaným řízením laboratorních postupů, a (d) dobře dokumentovanou způsobilostí personálu provádějícího měření.

**8.2.5** Řízením zdrojů variability tak, aby byly v rámci předepsaných mezí, lze předpokládat, že nejistota měření spojená s nejlepším odhadem měřené veličiny je zanedbatelná, není explicitně vyhodnocena a nehraje žádnou roli v rozhodnutí o přijetí či zamítnutí. Přístup v IEC Návodu 115 Postup 2 (“metoda přesnosti”) formalizuje současnou praxi elektrotechnických zkušebních laboratoří při použití nejmodernějšího měřicího zařízení a rutinních, dobře prověřených zkušebních metod.

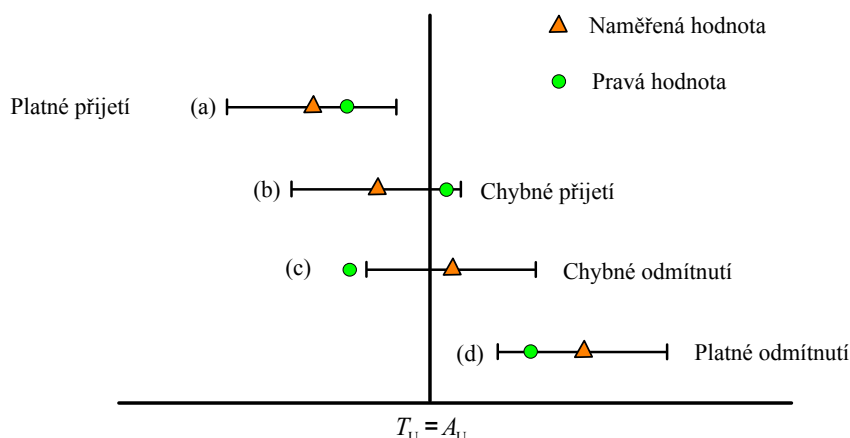
**8.2.6** V závislosti na relativní šířce tolerančního intervalu a intervalu pokrytí může jednoduché rozhodovací pravidlo pro přijetí či podobné rozhodovací pravidlo často podpořit cíle kvality měření a kalibrační prováděných na podporu posuzování shody.

## 8.3 Rozhodovací pravidla založená na ochranných pásmech

### 8.3.1 Obecné úvahy

**8.3.1.1** Přijetí či odmítnutí předmětu, je-li změřená hodnota jeho stanovené vlastnosti v blízkosti toleranční meze, může mít za následek nesprávné rozhodnutí a vést k nežádoucím důsledkům. Taková nesprávná rozhodnutí jsou obecně dvojího druhu v případě jednoduché horní toleranční meze [ilustrováno na Obrázku 8, výstupy (b) a (c)].

**8.3.1.2** U rozhodovacího pravidla založeného na jednoduchém přijetí a obvyklém případě symetrické unimodální PDF (jako je normální rozdělení) pro měřenou veličinu, může být pravděpodobnost přijetí nevyhovujícího předmětu [Obrázek 8, (b)] nebo odmítnutí vyhovujícího předmětu [Obrázek 8, (c)] až 50 %. To nastane, například, když změřená



**Obrázek 8** – Jednoduché rozhodovací pravidlo pro přijetí v blízkosti horní toleranční meze  $T_U$ , se čtyřmi 95 %-ními intervaly pokrytí. U takového rozhodovacího pravidla se mez přijetí  $A_U$  shoduje s toleranční mezí. Rozhodnutí přijmout či odmítnout inspektované (kontrolované) předměty jsou založena na naměřených hodnotách (trojúhelníky); pravé hodnoty (kroužky) jsou neznámé. Případy (b) a (c) vedou k nesprávným rozhodnutím nazývaným chybné přijetí a resp. chybné odmítnutí (viz odstavec 9.3.2). V případě (c) leží pravá hodnota měřené veličiny (aniž o tom víme) mimo 95 %-ní interval pokrytí.

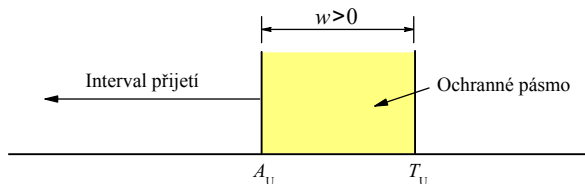
hodnota vlastnosti leží velmi blízko toleranční mezi. V takovém případě ca 50 % PDF pro měřenou veličinu bude ležet na každé z obou stranách meze, takže ať je předmět přijat či odmítnut, vždy bude ca 50 % šance nesprávného rozhodnutí.

**8.3.1.3** Každou z těchto pravděpodobností lze redukovat, na úkor zvýšení té druhé, volbou mezí přijetí vzdálenějších od tolerančních mezí, rozhodovací strategie shody zvaná vytváření ochranných pásem; viz odkazy [6, 7, 8, 9, 12, 17, 44].

### 8.3.2 Chráněné přijetí

**8.3.2.1** Riziko přijetí nevyhovujícího předmětu lze snížit vhodným nastavením meze přijetí  $A_U$  uvnitř tolerančního intervalu, jak je ukázáno na Obrázku 9. Interval definovaný pomocí  $T_U$  a  $A_U$  se nazývá *ochranné pásmo* (viz 3.3.11) a výsledné rozhodovací pravidlo se nazývá chráněné přijetí.

POZNÁMKA Chráněné přijetí je známo též jako přísné přijetí [2] a pozitivní shoda pro přijetí [18].



**Obrázek 9** – Rozhodovací pravidlo založené na chráněném přijetí. Horní mez přijetí  $A_U$  uvnitř horní toleranční meze  $T_U$  definuje interval přijetí, který snižuje pravděpodobnost chybného přijetí nevyhovujícího předmětu (riziko odběratele - spotřebitele). Dohodou je stanoveno, že rozměrový parametr  $w$  spojený s ochranným pásmem přijetí se bere jako kladný:  $w = T_U - A_U > 0$ .

**8.3.2.2** Rozdíl mezi toleranční mezí a odpovídající mezí přijetí definuje rozměrový parametr  $w$  pro ochranné pásmo, viz.

$$w = T_U - A_U.$$

Pro rozhodovací pravidlo chráněného přijetí je rozhodovací pravidlo  $w > 0$ .

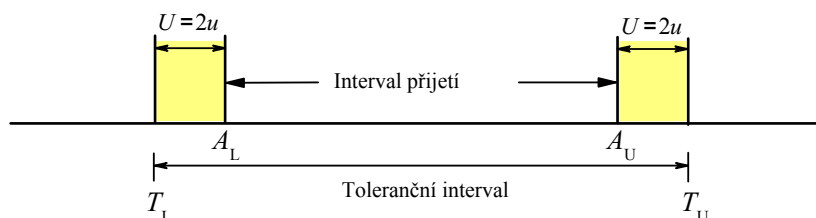
**8.3.2.3** V mnoha aplikacích je za rozměrový parametr  $w$  brán určitý násobek rozšířené nejistoty pro faktor pokrytí  $k = 2$ ,  $U = 2u$ , viz.

$$w = rU,$$

s násobitelem  $r$  vybraným tak, aby zajišťoval určitou minimální pravděpodobnost shody pro předmět, který je přijat. Obvyklou volbou je  $r = 1$ , kdy  $w = U$ .

**PŘÍKLAD** ISO 14253-1 [21] zavádí jakési výchozí rozhodovací pravidlo ochranného přijetí pro prokázání shody se specifikací. Obrázek 10 je převzat z ISO 14253-1, obrázek 7. V případě dvoustranného tolerančního intervalu, jsou horní a dolní mez přijetí odsazeny od příslušných tolerančních mezí o ochranná pásma s rozměrovým parametrem  $w = U = 2u$ .

Cílem zavedení ochranných pásem s  $w = 2u$  je zajistit, aby pro každou změřenou hodnotu ležící uvnitř intervalu přijetí byla pravděpodobnost přijetí nevyhovujícího předmětu nanejvýš 2.3 % za předpokladu normální PDF pro měřenou veličinu. Tato maximální pravděpodobnost nastane, souhlasí-li změřená hodnota vlastnosti s mezí přijetí. Pro naměřené hodnoty vzdálené od mezí přijetí bude pravděpodobnost chybného přijetí menší než toto maximum.



**Obrázek 10** – Dvoustranný interval přijetí vytvořený redukcí tolerančního intervalu na obou stranách o  $k = 2$  rozšířené nejistoty  $U = 2u$ . To je výchozí rozhodovací pravidlo zavedené v ISO 14253-1 [21].

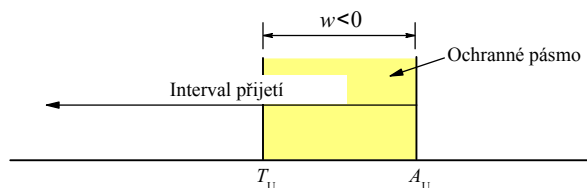
V ISO 14253-1 se interval přijetí nazývá zónou shody a toleranční interval se nazývá zónou specifikace. Značení na obrázku 10 odpovídá konvencím tohoto dokumentu.

### 8.3.3 Chráněné odmítnutí

**8.3.3.1** Vně tolerančního intervalu, jak je ukázáno na Obrázku 11, lze vybrat takovou mez přijetí, aby pravděpodobnost, že odmítnutý předmět je skutečně nevyhovující, byla zvýšena. Takové rozhodovací pravidlo chráněného odmítnutí se často používá, pokud chceme jasný důkaz, že mez byla překročena, předtím, než učiníme negativní akci.

**POZNÁMKA** Chráněné odmítnutí je také známé jako přísné odmítnutí [2] a pozitivní neshoda pro odmítnutí [18].

**8.3.3.2** Rozměrový parametr  $w$  pro ochranné pásmo chráněného odmítnutí je  $w = T_U - A_U < 0$ .



**Obrázek 11** – Rozhodovací pravidlo založené na chráněném odmítnutí. Horní mez přijetí  $A_U$  vně horní toleranční meze  $T_U$  definuje interval přijetí, který snižuje pravděpodobnost chybného odmítnutí vyhovujícího předmětu (riziko výrobce či dodavatele). Rozměrový parametr  $w$  spojený s ochranným pásmem chráněného odmítnutí je  $w = T_U - A_U < 0$ .

## PŘÍKLAD 1 Kontrola rychlostních limitů

Při vymáhání silniční legislativy policie měří rychlost motoristů použitím přístrojů jako jsou radary a lidary [42]. Rozhodnutí o udělení pokuty, což může vést i k řízení před soudem, je třeba učinit s vysokým stupněm přesvědčení, že rychlostní limit byl ve skutečnosti překročen.

Použitím určitého dopplerovského radaru lze provádět měření rychlosti v terénu s relativní standardní nejistotou  $u(v)/v$  rovnou 2 % v intervalu od 50 km/h do 150 km/h. Předpokládejme, že znalost měřené rychlosti  $v$  v tomto intervalu lze charakterizovat normální PDF s očekávanou hodnotou  $v$  a směrodatnou odchylkou  $0,02v$ .

Za těchto podmínek se můžeme při rychlostním limitu  $v_0 = 100$  km/h ptát, jaká hraniční rychlost  $v_{\max}$  (mez přijetí) má být nastavena tak, aby pro změřenou rychlost  $v \geq v_{\max}$  byla pravděpodobnost, že  $v \geq v_0$ , alespoň 99,9 %?

Tento matematický problém je ekvivalentní výpočtu pravděpodobnosti shody pro jednostranný toleranční interval (viz odstavec 7.3). Zde potřebujeme znát hodnotu  $z = (v_{\max} - v_0)/(0,02v_{\max})$ , pro kterou s 99,9 %-ní pravděpodobností leží v oblasti  $V \geq v_0$ . Z tabulky 1 na straně 15 můžeme vidět, že  $z = 3,09$ , takže

$$v_{\max} = \frac{v_0}{1 - 0,02z} = \frac{100}{1 - 0,02 \times 3,09} \text{ km/h} \approx 107 \text{ km/h.}$$

Interval  $[100 \text{ km/h} \leq v \leq 107 \text{ km/h}]$  je ochranným pásmem, které zajišťuje s pravděpodobností alespoň 99,9 %, že rychlostní limit byl překročen pro měřenou rychlost 107 km/h a vyšší.

## PŘÍKLAD 2 Drogy v živých zvířatech a v živočišných výrobcích

Anabolický steroid nandrolon patří do skupiny látek zakázaných jako podporovatelé růstu ve zvířatech určených pro výrobu potravin. Tato látka se vyskytuje v některých živých zvířatech přirozeně a byla zde proto ustanovena hraniční (toleranční) mez  $T$  rovná 2,00  $\mu\text{g/L}$ .

V prověřovací zkoušce na nandrolon je změřená koncentrace překračující hraniční hodnotu s pravděpodobností 95 % nebo vyšší považována za podezřelou a měl by následovat postup pro potvrzení tohoto závěru.

Při provádění prověřovací zkoušky si laboratoř přeje nastavit rozhodovací (přejímací) mez  $A$  rovnou

$$A = T + g,$$

kde  $g = |w|$  je ochranné pásmo (viz Obrázek 11) takové, že pro změřenou hodnotu koncentrace  $y \geq A$  je pravděpodobnost, že  $Y \geq T$ , menší než 95 %.

Daná laboratoř validuje svůj postup měření tím, že spajkováním (umělé přidávání příměsí) deseti čistých vzorků na koncentrační úrovni blízké dané hranici. Vzorky jsou pak měřeny za podmínek vnitrolaboratorní reprodukovatelnosti a dostaneme tak směrodatnou odchylku z pozorované reprodukovatelnosti  $s$  (ISO 3534-2, 3.3.12) rovnou 0,20  $\mu\text{g/L}$ .

Ze spajkovacího experimentu učiní laboratoř závěr, zda jsou její měření prosta významných systematických chyb. V nejistotě měření dominují vlivy reprodukovatelnosti a za PDF pro koncentraci nandrolonu  $Y$  se tak bere rozšířené a posunuté  $t$ -rozdělení (viz JCGM 101:2008 6.4.9) s  $\nu = 9$  stupni volnosti.

Z tabulek či pomocí vhodného softwaru pro  $t$ -rozdělení (jednostranné,  $\nu = 9$  stupňů volnosti, 95 % pravděpodobnost) vypočteme, že hodnota ochranného pásma je

$$g = t_{0,95;9} \times s = 1,83 \times 0,20 \mu\text{g/L} = 0,37 \mu\text{g/L.}$$

Vzorek s naměřenou hodnotou  $y$  koncentrace nandrolonu větší než nebo rovné

$$A = (2,00 + 0,37) \mu\text{g/L} = 2,37 \mu\text{g/L}$$

se tak považuje za podezřelý.

## 9 Rizika spotřebitele (odběratele) a výrobce (dodavatele)

### 9.1 Obecně

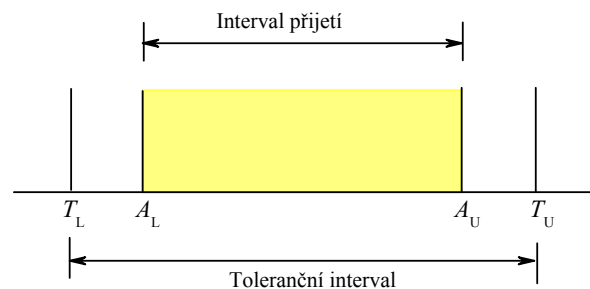
**9.1.1** Při posuzování shody použitím binárního rozhodovacího pravidla je vlastnost předmětu změřena a předmět je přijat jako vyhovující, leží-li naměřená hodnota vlastnosti v definovaném intervalu přijetí. Naměřená hodnota

mimo interval přijetí vede k odmítnutí předmětu jako nevyhovujícího. Obrázek 12, který je reprodukcí obrázku 1 na straně viii, ilustruje předmětné intervaly a ukazuje toleranční interval (vyhovujících hodnot) a interval přijetí (dovolených naměřených hodnot).

**9.1.2** Použití ochranných pásem nabízí cestu, jak omezit pravděpodobnost provedení nesprávného rozhodnutí o shodě na základě informace z měření stručně vyjádřené intervalem pokrytí. Tento odstavec se zabývá přesnějším vyhodnocením takových pravděpodobností u výrobního procesu. Vyhodnocované pravděpodobnosti závisí na dvou faktorech, výrobním procesem a měřicím systémem.

**9.1.3** Kdyby byl měřicí systém dokonale přesný, byla by všechna rozhodnutí o shodě správná a všechna rizika rovna nule. Nárůst nejistoty měření znamená zvýšení pravděpodobnosti nesprávného rozhodnutí a tato pravděpodobnost je přitom největší v blízkosti tolerančních mezí.

**9.1.4** Tato rizika též závisí na povaze výrobního procesu. Pokud tento proces zřídka vyprodukuje předmět, jehož zájmová vlastnost je v blízkosti tolerančních mezí, je příležitost pro provedení nesprávných rozhodnutí menší. Opačně, jestliže proces produkuje předměty s vlastnostmi, které mají tendenci být v blízkosti tolerančních mezí, jsou nejistoty spojené s těmito měřeními vneseny do hry. Zbývající část tohoto odstavce ukazuje, jak mohou být příspěvky obou faktorů vyhodnoceny.



**Obrázek 12** – Binární posuzování shody, kdy jsou rozhodnutí založena na naměřených hodnotách veličiny. Pravá hodnota měřitelné vlastnosti (měřená veličina) předmětu má podle specifikace ležet v tolerančním intervalu definovaném mezemi ( $T_L, T_U$ ). Daný předmět je přijat jako vyhovující, jestliže naměřená hodnota vlastnosti leží v intervalu přijetí definovaném mezemi ( $A_L, A_U$ ), a jinak odmítnut jako nevyhovující.

## 9.2 PDF pro výrobní proces a měřicí systém

**9.2.1** Uvažujme proces, který produkuje sekvenci předmětů, z nichž každý má měřitelnou vlastnost  $Y$  s možnými hodnotami  $\eta$ . Tímto procesem může být stroj vyrábějící odpory s normální rezistancí 10 k $\Omega$  nebo proces vzorkování poskytující nádobky s mořskou vodou obsahující rozpouštěnou rtuť. U předmětu náhodně vybraného z tohoto procesu je znalost vlastnosti  $Y$  předtím, než je změřena, zprostředkována apriorní PDF  $g_0(\eta)$ . O této PDF  $g_0(\eta)$  lze říci, že charakterizuje výrobní proces a někdy se nazývá hustota pravděpodobnosti procesu. Tvar  $g_0(\eta)$  se obvykle přiřazuje na základě znalosti získané měřeními předmětné vlastnosti na vzorku vyrobených předmětů.

**POZNÁMKA** Přiřazování apriorní PDF na základě změřených vzorků předmětu je diskutováno v Příloze B.

**9.2.2** Posuzování shody vyrobeného předmětu se provádí měřením vlastnosti, o kterou se zajímáme. Výstupem měřicího systému je veličina považovaná za pozorovatelnou náhodnou proměnnou  $Y_m$  jejíž možné hodnoty  $\eta_m$ , za předpokladu známé vstupní hodnoty  $Y = \eta$ , jsou podchyceny a zprostředkovány funkcí PDF  $h(\eta_m|\eta)$ . Tvar  $h(\eta_m|\eta)$  je přiřazen na základě konstrukce měřicího systému, informací získaných z kalibrací a znalosti příslušných ovlivňujících veličin jako jsou parametry okolního prostředí a vlastnosti materiálů.



### 9.3 Možné výstupy inspekčního měření s binárním rozhodovacím pravidlem

**9.3.1** Necht'  $C$  a  $\tilde{C}$  značí intervaly vyhovujících resp. nevyhovujících hodnot  $Y$ , a necht'  $\mathcal{A}$  a  $\tilde{\mathcal{A}}$  značí intervaly přijatelných resp. nepřijatelných hodnot  $Y_m$ . V obrázku 12, například,  $C$  odpovídá hodnotám  $Y$  v intervalu  $T_L \leq Y \leq T_U$ , a  $\mathcal{A}$  odpovídá hodnotám  $Y_m$  v intervalu  $A_L \leq Y_m \leq A_U$ .

**9.3.2** U binárního rozhodovacího pravidla jsou čtyři možné výstupy zkoušky posuzování shody, která dává hodnotu měřené veličiny  $\eta_m$ :

**Platné přijetí:** předmět je přijat ( $Y_m = \eta_m \in \mathcal{A}$ ) a vyhovuje specifikaci ( $Y \in C$ ). To je žádaný výstup zkoušky posuzování shody, který vede k přijetí vyhovujícího předmětu.

**Chybné přijetí:** předmět je přijat ( $Y_m = \eta_m \in \mathcal{A}$ ), ale nevyhovuje specifikaci ( $Y \in \tilde{C}$ ). To je nesprávné rozhodnutí, jehož pravděpodobnost se nazývá riziko spotřebitele (odběratele), protože náklady spojené s takovým omylem často nese spotřebitel (odběratel) nebo uživatel, který předmět přijal jako hodící se pro jeho účel a podle toho se zachoval.

POZNÁMKA Chybné přijetí se také nazývá chyba schválení nebo chybné pozitivní.

U určitého měřeného předmětu přijatého jako vyhovující při dané změřené hodnotě  $Y_m = \eta_m \in \mathcal{A}$  se pravděpodobnost chybného přijetí nazývá *specifické riziko spotřebitele* (viz 3.3.13) [38], označované jako  $R_C^*$ . Z definice (4) pravděpodobnosti shody můžeme vidět, že  $R_C^*$  je dáno jako

$$R_C^* = 1 - p_c,$$

pro naměřenou hodnotu  $\eta_m$  v intervalu přijetí. U předmětu vybraného náhodně z výrobního procesu se pravděpodobnost, že bude chybné přijat po měření, nazývá *komplexní riziko spotřebitele* (viz 3.3.15) [38], označované jako  $R_C$ . Výpočet  $R_C$  je vloženo v odstavci 9.5.

**Platné odmítnutí:** předmět je odmítnut ( $Y_m = \eta_m \in \tilde{\mathcal{A}}$ ) a nevyhovuje specifikaci ( $Y \in \tilde{C}$ ). To je žádaný výstup zkoušky posuzování shody, které vede k odmítnutí nevyhovujícího předmětu.

**Chybné odmítnutí:** předmět je odmítnut ( $Y_m = \eta_m \in \tilde{\mathcal{A}}$ ), ale ve skutečnosti vyhovuje specifikaci ( $Y \in C$ ). To je další nesprávné rozhodnutí, jehož pravděpodobnost se nazývá riziko výrobce (dodavatele), protože náklady spojené s takovým omylem často nese výrobce, který nemůže prodat předmět, který nevyhověl ve zkoušce shody.

POZNÁMKA Chybné odmítnutí je také známé jako chyba neschválení nebo jako chybné negativní.

U určitého měřeného předmětu odmítnutého jako nevyhovující při dané změřené hodnotě  $Y_m = \eta_m \in \tilde{\mathcal{A}}$  se pravděpodobnost chybného odmítnutí nazývá *specifické riziko výrobce* (viz 3.3.14) [38], označované jako  $R_P^*$ . Z definice (4) pravděpodobnosti shody můžeme vidět, že  $R_P^*$  je dáno jako

$$R_P^* = p_c,$$

pro změřenou hodnotu  $\eta_m$  mimo interval přijetí. U předmětu vybraného náhodně z výrobního procesu se pravděpodobnost, že bude chybné odmítnut po měření, nazývá *globální riziko výrobce* (viz 3.3.16) [38], označované jako  $R_P$ . Výpočet  $R_P$  se pobírá v odstavci 9.5.

### 9.4 Sdružená PDF pro $Y$ a $Y_m$

**9.4.1** Jak je patrné z odstavce 9.3.2, specifické riziko spotřebitele a specifické riziko výrobce  $R_C^*$  a  $R_P^*$  mají jednoduchý vztah k pravděpodobnosti shody pro určitý změřený předmět, je-li dán výsledek měření. Je-li hodnota vlastnosti  $Y$  mimo toleranční interval a naměřená hodnota  $Y_m$  je uvnitř intervalu přijetí, pak vzniká riziko spotřebitele. Pravděpodobnost, že nastanou obě tyto události, tj. globální riziko spotřebitele je dáno sdruženým rozdělením pravděpodobnosti, které závisí na výrobním procesu a měřícím systému.

**9.4.2** Sdruženou hustotu pravděpodobnosti lze psát jako součin hustot, které jsou již známy. Slovně, pravděpodobnost, že hodnota měřené veličiny  $Y$  je mimo toleranční interval a naměřená hodnota  $Y_m$  je uvnitř intervalu přijetí, je dána pravděpodobností, že výrobní proces vyprodukuje předmět s pravou hodnotou  $Y$  mimo toleranční interval násobená pravděpodobností, že měřicí systém vyprodukuje naměřenou hodnotu  $Y_m$  uvnitř intervalu přijetí, je-li dáno, že měřená veličina  $Y$  je mimo toleranční interval.

**9.4.3** Obdobně je globální riziko výrobce definováno pomocí téhož sdruženého rozdělení pravděpodobnosti. Považujeme-li toleranční interval, výrobní proces a měřicí systém za pevně dané, jsou globální riziko spotřebitele a globální riziko výrobce určeny mezemi přijetí. Meze přijetí lze tedy nastavit tak, abychom dosáhli přijatelné rovnováhy mezi oběma druhy těchto rizik. Obecně není možné nastavit meze přijetí tak, abychom současně minimalizovali jak riziko spotřebitele, tak riziko výrobce: zmenšení jednoho zvýší úroveň toho druhého.

**9.4.4** V literatuře o řízení kvality a posuzování shody jsou pojmy ‘riziko spotřebitele’ a ‘riziko výrobce’ obecně používány ve smyslu globálních rizik tak, jak je popsáno výše.

**9.4.5** Pro daný výrobní proces a měřicí systém je znalost možných výstupů zkoušky posuzování shody náhodně vybraného předmětu popsána sdruženou funkcí hustoty pravděpodobnosti. U takto náhodně vybraného předmětu je pravděpodobnost toho, že (a) hodnota měřené veličiny  $Y$  leží v intervalu  $\eta \leq Y \leq \eta + d\eta$  a že (b) změření  $Y$  poskytne naměřenou hodnotu  $Y_m$  v intervalu  $\eta_m \leq Y_m \leq \eta_m + d\eta_m$  je dána vztahem

$$\Pr(\eta \leq Y \leq \eta + d\eta \text{ and } \eta_m \leq Y_m \leq \eta_m + d\eta_m) = f(\eta, \eta_m) d\eta d\eta_m, \quad (15)$$

kde  $f(\eta, \eta_m)$  je sdružená PDF  $Y$  a  $Y_m$ .

**9.4.6** Použitím pravidla násobení (součinu) z teorie pravděpodobnosti lze sdruženou hustotu  $f(\eta, \eta_m)$  vyjádřit jako součin (faktorizovat) dvěma způsoby podle

$$f(\eta, \eta_m) = g_o(\eta) h(\eta_m|\eta) \quad (16a)$$

a

$$f(\eta, \eta_m) = h_o(\eta_m) g(\eta|\eta_m). \quad (16b)$$

**9.4.7** Ty dvě PDF na pravé straně výrazu (16a) jsou hustoty pravděpodobnosti popsané v odstavci 9.2. Jsou-li dány tvary těchto PDF, ty dvě hustoty pravděpodobnosti na pravé straně výrazu (16b) lze vypočítat, je-li to požadováno. Takový výpočet je ilustrován v Příloze A (viz odstavce A.4.3 a A.4.4).

## 9.5 Výpočet globálních rizik

### 9.5.1 Historický kontext

**9.5.1.1** V následujících odstavcích jsou odvozeny vzorce pro výpočet globálních rizik nesprávných rozhodnutí. Takové výpočty byly tradičně prováděny použitím naměřených frekvenčních rozdělení různých výsledků po změření velkého vzorku nominálně identických předmětů. V rámci tohoto přístupu je globální riziko spotřebitele je rovno podílu předmětů ve změřeném vzorku, které byly přijaty k používání, ale nevyhovují stanovenému požadavku. Taková neshoda u daného předmětu musí být po zjištění tohoto faktu prokázána zvláštním měřením s nejistotou mnohem menší než měl měřicí systém použitý k prokazování shody.

**9.5.1.2** Globální rizika uvedená níže se počítají spíše s využitím rozdělení pravděpodobnosti než frekvenčních rozdělení, takže není nutné uvažovat určitý soubor změřených předmětů, který ve skutečnosti nemusí ani existovat. Numericky budou vypočtené pravděpodobnosti vždy souhlasit s naměřenými frekvencemi výskytu. Meze přijetí tak mohou být vybrány tak, aby v průměru poskytly přijatelný podíl chybně přijatých či odmítnutých předmětů při posuzování shody předmětů ve vzorku.

### 9.5.2 Obecné vzorce

**9.5.2.1** Jsou-li dány sdružená PDF (16a) a obě hustoty pravděpodobnosti  $g_o(\eta)$  a  $h(\eta_m|\eta)$ , lze vypočítat pravděpodobnosti každého ze čtyř možných výstupů popsaných výše (viz odstavec 9.3). Těmito pravděpodobnostmi

jsou jednoduše obsahy ploch pod sdruženou hustotou pravděpodobnosti  $f(\eta, \eta_m)$ , integrované přes tyto čtyři oblasti, které popisují všechny možné výstupy.

**9.5.2.2** Zvláštní význam mají globální riziko spotřebitele a globální riziko výrobce počítané následujícím způsobem:

- Pro naměřenou hodnotu v intervalu přijetí a hodnotu  $Y$  mimo toleranční interval je globální riziko spotřebitele rovno

$$R_C = \int_{\bar{C}} \int_{\mathcal{A}} g_o(\eta) h(\eta_m|\eta) d\eta_m d\eta. \quad (17)$$

- Pro naměřenou hodnotu mimo interval přijetí a hodnotu  $Y$  uvnitř tolerančního intervalu je globální riziko výrobce rovno

$$R_P = \int_C \int_{\bar{\mathcal{A}}} g_o(\eta) h(\eta_m|\eta) d\eta_m d\eta. \quad (18)$$

**9.5.2.3** Výrazy (17) a (18) jsou obecnými vzorci pro výpočet globálních rizik spotřebitele a výrobce. V závislosti na daném tvaru PDF  $g_o(\eta)$  a  $h(\eta_m|\eta)$  se může ukázat jako nutné provést explicitní vyhodnocení  $R_C$  a  $R_P$  číselně.

### 9.5.3 Speciální případ: Binární rozhodovací pravidlo

**9.5.3.1** Speciálně pro binární posuzování shody ilustrované na obrázku 12 mají vzorce (17) a (18) tvar

$$R_C = \left( \int_{-\infty}^{T_L} + \int_{T_U}^{\infty} \right) \int_{A_L}^{A_U} g_o(\eta) h(\eta_m|\eta) d\eta_m d\eta, \quad (19)$$

a

$$R_P = \left( \int_{-\infty}^{A_L} + \int_{A_U}^{\infty} \right) \int_{T_L}^{T_U} g_o(\eta) h(\eta_m|\eta) d\eta d\eta_m. \quad (20)$$

**9.5.3.2** Použití výrazů (19) a (20) v případě, kdy je sdružená PDF (15) produktem normálních rozdělení, lze ilustrovat na následujícím příkladu. Vlastnosti normálních rozdělení včetně konkrétních tvarů výrazů (19) a (20) jsou diskutovány v Příloze A.

#### PŘÍKLAD Výroba přesných odporů

Dodavatel elektronických součástek vyrábí vinuté přesné odpory o jmenovité rezistanci 1 500  $\Omega$ . Pro každý odpor (předmět) je stanoveno, že rezistance  $Y$  (vlastnost, která nás zajímá) má ležet v tolerančním intervalu definovaném mezemi  $T_L = 1 499,8 \Omega$  a  $T_U = 1 500,2 \Omega$ .

Stroj vyrábějící takové odpory je vyhodnocován tak, že se měří vzorek jeho produkce použitím vysoce přesného ohmmetru se zanedbatelnou nejistotou měření. Histogram naměřených hodnot se jeví jako normálně rozdělený se středem na jmenovité hodnotě se směrodatnou odchylkou  $\sigma = 0,12 \Omega$ . Na základě této informace přiřadíme modelu výrobního procesu normální PDF  $g_o(\eta) = \varphi(\eta; y_0, u_0^2)$  s  $y_0 = 1 500 \Omega$  a  $u_0 = \sigma = 0,12 \Omega$ .

U typického odporu vyrobeného tímto strojem je pravděpodobnost shody rovna

$$p_c = \int_{T_L}^{T_U} g_o(\eta) d\eta = \int_{1 499,8}^{1 500,2} \varphi(\eta; 1 500, 0,12^2) d\eta \approx 0,90 = 90 \%. \quad (21)$$

Pokud dodavatel prostě distribuuje každý vyrobený odpor, tak ca 10 % z nich bude neshodných, což lze z ekonomických důvodů posoudit jako nepřijatelné. Koupí dražšího výrobního stroje lze variabilitu výrobního procesu snížit. V tomto případě bylo učiněno rozhodnutí, při uvážení příslušných nákladů, zachovat existující stroj a implementovat inspekční proces pro detekci a odstranění neshodných odporů.

Ve výrobě jsou odpory kontrolovány na shodu se specifikací použitím kalibrovaného vysokorychlostního ohmmetru. Normální PDF  $h(\eta_m|\eta) = \varphi(\eta_m; \eta, u_m^2)$  a  $u_m = 0,04 \Omega$ , je tomuto procesu přiřazena pro podchycení a zprostředkování víry v takový interval naměřených hodnot, který by byl pozorován při měření známé rezistance  $Y = \eta$ . Toto přiřazení je založeno na modelu měřicího systému a na vyhodnocení nejistoty měření včetně nejistoty spojené s kalibrací ohmmetru.

S cílem snížit pravděpodobnost dodávky odporů, které nevyhovují specifikaci (riziko spotřebitele - odběratele), zvolíme meze přijetí  $A_L = 1 499,82 \Omega$ ,  $A_U = 1 500,18 \Omega$  tak, aby ležely uvnitř tolerančního intervalu (viz Obrázek 12, strana 24), čímž vytvoříme interval chráněného přijetí se symetrickými ochrannými pásy délky

$$w = (1 500, -1 500,18) \Omega = 0,02 \Omega = 0,25U.$$

Rizika spotřebitele a výrobce pak vypočteme z výrazů (A.15)–(A.17) s

$$\varphi_0(z) = (1/\sqrt{2\pi}) \exp(-z^2/2)$$

a

$$F(z) = \Phi\left(\frac{A_U - y_0 - u_0 z}{u_m}\right) - \Phi\left(\frac{A_L - y_0 - u_0 z}{u_m}\right) = \Phi(4,5 - 3z) - \Phi(-4,5 - 3z).$$

Numericickou integrací dostaneme

$$R_C = \int_{-\infty}^{-1,667} F(z)\varphi_0(z) dz + \int_{1,667}^{\infty} F(z)\varphi_0(z) dz = 0,01 = 1 \%,$$

and

$$R_P = \int_{-1,667}^{1,667} [1 - F(z)]\varphi_0(z) dz = 0,07 = 7 \%.$$

Zajímavé rysy tohoto postupu posuzování shody můžeme zaznamenat, budeme-li uvažovat průměrný vzorek 100 odporů vyrobených daným strojem, změřený a přijatý nebo odmítnutý jako vhodný pro zamýšlené použití:

- při daných vlastnostech výrobního procesu 90 odporů vyhovuje specifikaci a 10 nevyhovuje (viz výraz (21));
- z těch 90 vyhovujících odporů je 83 přijato a 7 chybně odmítnuto jako nevyhovující;
- z těch 10 nevyhovujících odporů je 9 odmítnuto a jeden chybně přijat jako vyhovující;
- 84 z těchto odporů je přijato; z nich  $83/84 \approx 99 \%$  vyhovuje, s ca 1 % mimo toleranci. To bylo cílem inspekčního měření, snížit mezi těmi přijatými pro dané použití podíl nevyhovujících odporů z 10 % na 1 %;
- ze 16 odporů, které byly odmítnuty,  $7/16 \approx 44 \%$  ve skutečnosti vyhovuje specifikaci. To je však cena, kterou musíme zaplatit za to, že snížíme riziko přijetí nevyhovujících výrobků.

## 9.5.4 Nastavení mezí přijetí

**9.5.4.1** Ve výše uvedeném příkladu byla globální rizika  $R_C$  a  $R_P$  vypočtena při známých mezích přijetí  $A_L$  a  $A_U$ . Ve většině reálných aplikací je požadovaná úroveň rizika vybrána na základě analýzy nákladů a meze přijetí jsou vypočteny tak, aby bylo zajištěno, že bude dosažena požadovaná úroveň rizika. Takové výpočty však nejsou jednoduché. Praktický přístup k takovým problémům spočívá v grafickém řešení tak, jak je to ilustrováno na následujícím příkladu.

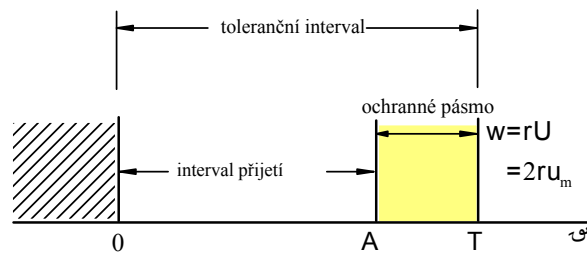
### PŘÍKLAD Výroba kuličkových ložisek

Určitý výrobce vyrábí velký počet kuličkových ložisek. Specifikace výkonnosti těchto ložisek (předměty) požaduje, aby u každého z nich byl parametr zvaný radiální házení (vlastnost, která nás zajímá) menší než 2  $\mu\text{m}$ . Radiální házení ložiska představuje nežádoucí pohyb kolmý na osu rotace. U dokonalého ložiska by bylo radiální házení nulové; každé reálné ložisko však má určité kladné radiální házení.

Za účelem charakterizace výrobního procesu bylo změřeno radiální házení velkého vzorku ložisek použitím vysoce přesného zkušebního zařízení se zanedbatelnou nejistotou měření. U tohoto vzorku bylo průměrné pozorované radiální házení rovno  $\bar{y} = 1 \mu\text{m}$  s příslušnou výběrovou směrodatnou odchylkou  $s = 0,5 \mu\text{m}$ .

Před expedicí jsou ložiska testována na shodu se specifikací. Při těchto zkouškách je radiální házení měřeno použitím kalibrovaného zkušebního zařízení. Měřicí systém nechť je charakterizován normální PDF  $\varphi(\eta_m; \eta, u_m^2)$  se standardní nejistotou  $u_m = 0,25 \mu\text{m}$ .

Z ekonomických důvodů musí být podíl nevyhovujících ložisek prodaných zákazníkům jako vyhovující (globální riziko spotřebitele) udržován na úrovni 0,1 % nebo menší. Jak zvolit mez přijetí  $A$  tak, abychom vyhověli tomuto požadavku?



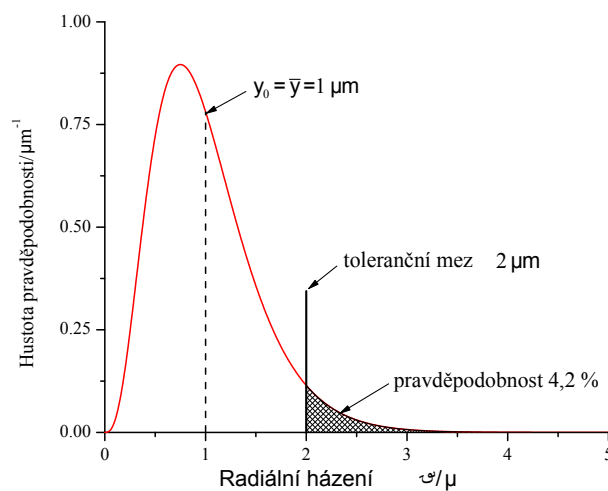
**Obrázek 13 – Toleranční intervaly a intervaly přijetí pro posuzování shody kuličkových ložisek. Dovolené hodnoty radiálního házení  $Y$  leží v intervalu  $0 \leq \eta \leq T$ . Mez přijetí  $A$  je oddělena od toleranční meze  $T$  ochranným pásmem s rozměrovým parametrem  $w = rU = 2ru_m$ . Rozhodovacím pravidlem je v tomto případě chráněné přijetí s  $w > 0$ .**

Tento problém posuzování shody je ilustrován na Obrázku 13. Vyhovující kuličkové ložisko má mít podle specifikace radiální házení  $Y$  v intervalu  $0 \leq \eta \leq T$ . Protože radiální házení je vždy kladné s naměřenými hodnotami v blízkosti nuly, budeme apriorní PDF pro radiální házení  $Y$  modelovat hustotou pravděpodobnosti rozdělení gamma (viz Příloha B, odstavec B.3). Na základě změření vzorku (výběru) přiřadíme očekávané hodnotě a standardní nejistotě apriorní PDF hodnoty  $y_0 = \bar{y} = 1 \mu\text{m}$  a  $u_0 = s = 0,5 \mu\text{m}$ . Použitím výrazů (B.14) vypočteme parametry  $\alpha$  and  $\lambda$ :

$$\alpha = \frac{1^2}{(0,5)^2} = 4, \quad \lambda = \frac{1}{(0,5)^2} = 4.$$

Z definice (B.11) hustoty pravděpodobnosti gamma je pak apriorní PDF pro radiální házení ložiska  $Y$  rovna

$$g_0(\eta) = \text{gamma}(\eta; 4, 4) = \frac{128}{3} \eta^3 e^{-4\eta}, \quad \eta \geq 0. \quad (22)$$



**Obrázek 14 – Apriorní PDF rozdělení gamma daná výrazem (22) přiřazená na základě frekvenčního rozdělení naměřených radiálních chybových pohybů na vzorku kuličkových ložisek. Toleranční interval tvoří oblast  $0 \leq \eta \leq 2 \mu\text{m}$ . Očekávanou hodnotou rozdělení je apriorní odhad  $y_0 = 1 \mu\text{m}$  s příslušnou standardní nejistotou  $u_0 = 0,5 \mu\text{m}$ . Protože dané rozdělení není symetrické, není nejpravděpodobnější hodnota  $Y$  (modus rozdělení, zde rovný  $0,75 \mu\text{m}$ ) rovna  $y_0$ .**

Tato PDF je znázorněna na Obrázku 14. Pravděpodobnost, že z výrobního procesu náhodně vybrané kuličkové ložisko bude vykazovat radiální házení vyšší než  $2 \mu\text{m}$  je znázorněna vyšrafovanou oblastí. Tato pravděpodobnost neshody je

$$\bar{p}_c = \int_2^{\infty} \text{gamma}(\eta; 4, 4) d\eta = 0.042,$$

což znamená, že kdyby všechna vyrobená kuličková ložiska byla expedována bez měření, ca 4,2 % z nich by bylo neshodných. Měřicí systém pro kontrolu výroby je navržen tak, aby byl schopen detekovat neshodná ložiska tak, aby nebyla expedována.

Hledáme mez přijetí tak, aby se riziko spotřebitele  $R_C$  snížilo na 0,1 % nebo menší. Pro rozhodovací pravidlo posuzování shody znázorněné na Obr. 13 odpovídá toleranční interval  $0 \leq Y \leq T$  a interval přijetí  $0 \leq Y_m \leq A$ . Způsobem analogickým ke krokům vedoucím k výrazům (19) a (20) vyhodnotíme globální rizika spotřebitele a výrobce takto

$$R_C = \int_T^\infty \int_0^A g_0(\eta) h(\eta_m|\eta) d\eta_m d\eta, \quad R_P = \int_0^T \int_A^\infty g_0(\eta) h(\eta_m|\eta) d\eta_m d\eta.$$

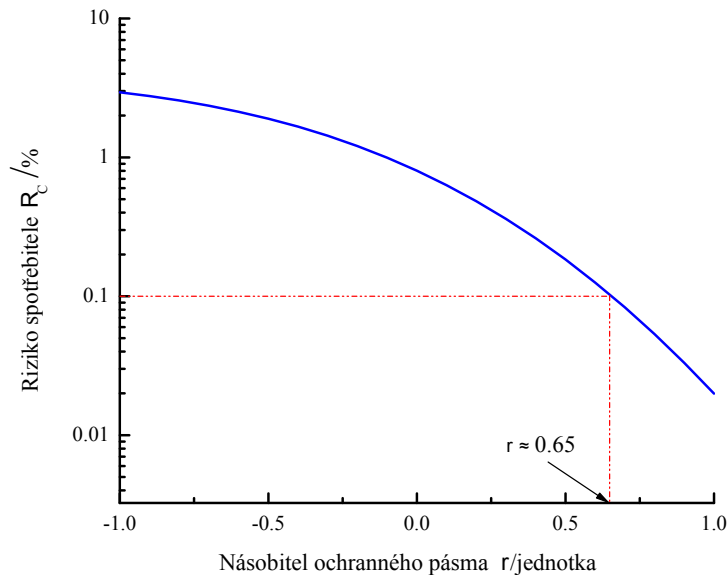
Když u měřicího systému charakterizovaného normální PDF  $h(\eta_m|\eta) = \varphi(\eta_m; \eta, u_m^2)$  provedeme substituce  $z = (\eta_m - \eta)/u_m$ ,  $dz = d\eta_m/u_m$ , a provedeme integrace přes  $z$ , dostaneme z těchto výrazů

$$R_C = \int_T^\infty \left[ \Phi\left(\frac{A-\eta}{u_m}\right) - \Phi\left(-\frac{\eta}{u_m}\right) \right] g_0(\eta) d\eta, \quad R_P = \int_0^T \left[ 1 - \Phi\left(\frac{A-\eta}{u_m}\right) \right] g_0(\eta) d\eta.$$

Z Obrázku 13 lze vidět, že  $A = T - 2ru_m$ . Zde  $T = 2 \mu\text{m}$  a  $u_m = 0,25 \mu\text{m}$ . Když pak položíme  $g_0(\eta)$  rovné gamma PDF výrazu (22), dostaneme explicitní výsledky

$$R_C(r) = \frac{128}{3} \int_2^\infty [\Phi(8 - 2r - 4\eta) - \Phi(-4\eta)] \eta^3 e^{-4\eta} d\eta, \quad (23)$$

$$R_P(r) = \frac{128}{3} \int_0^2 [1 - \Phi(8 - 2r - 4\eta)] \eta^3 e^{-4\eta} d\eta. \quad (24)$$



**Obrázek 15 – Globální riziko spotřebitele  $R_C$  versus násobitel ochranného pásma  $r$ . Pro  $r \approx 0,65$ , je mez přijetí  $A = T - 2(0,65)u_m = 1,7 \mu\text{m}$ , a požadované riziko  $R_C = 0,1 \%$  je tak dosaženo.**

Tyto integrály nelze vyhodnotit v uzavřeném tvaru (analyticky), ale lze je pro jakoukoliv vybranou hodnotu násobitele  $r$  ochranného pásma vypočítat numericky.

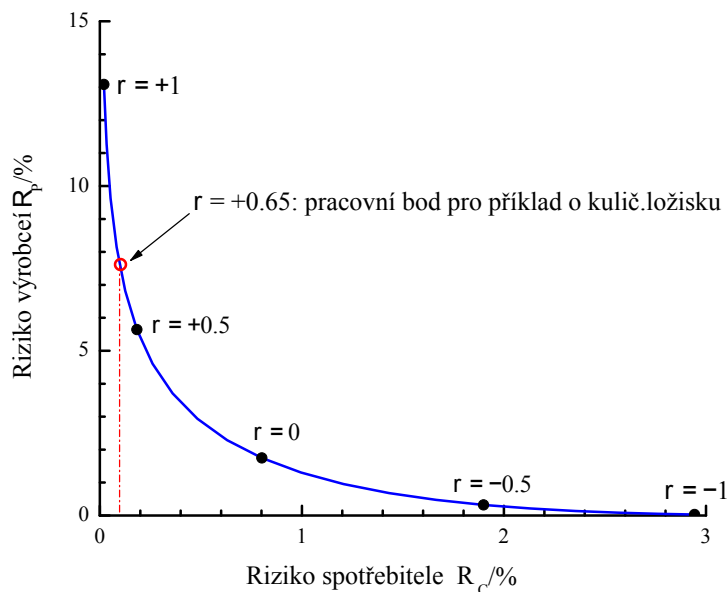
Obrázek 15 znázorňuje globální riziko spotřebitele  $R_C$  pro  $-1 \leq r \leq 1$ . Kladné  $r$  odpovídá  $A < T$  (chráněné přijetí) a záporné  $r$  odpovídá  $A > T$ . Při  $r = 0$  žádné ochranné pásmo neexistuje ( $A = T$ ), jde o rozhodovací pravidlo zvané sdílené riziko neboli jednoduché přijetí (viz odstavec 8.2). Obrázek ukazuje, že požadovaná úroveň rizika,  $R_C = 0,1 \%$ , se dosáhne při násobiteli ochranného pásma  $r \approx 0,65$ . To má za následek interval chráněného přijetí s mezí přijetí

$$A = T - 2ru_m = (2 - 2 \times 0,65 \times 0,25) \mu\text{m} \approx 1,7 \mu\text{m}.$$

Výběr meze přijetí řeší daný problém rozhodování.

Při posuzování shody s binárním rozhodovacím pravidlem každá akce s cílem snížit riziko spotřebitele vždy zvýší riziko výrobce. Toto obecné pravidlo je pěkně ilustrováno Obrázkem 16, který znázorňuje vztah  $R_P$  versus  $R_C$  vypočtený numericky ze vzorce (23) a (24) pro případ kuličkových ložisek. Pro  $r = 0,65$  je globální riziko výrobce  $R_P$  ca 7,5 %. To znamená, že ca 75 z každého 1000 kuličkových ložisek, které neprojdou kontrolou, ve skutečnosti vyhovuje specifikaci, což má za následek ztrátu příjmů, které by byly získány, kdyby byla ta dobrá ložiska prodána.

Vytváření zvyšujícího se množství odpadu je cenou za chráněné přijetí, jejímž cílem je snížit přijetí a expedici nevyhovujících výrobků. V praxi musí dodavatel zvolit určitý operační bod na podobné křivce, která je znázorněna na Obrázku 16, který vyváží tato rizika a poskytne optimální výstup. Výběr takového operačního bodu je obchodní nebo politické rozhodnutí, které vyžaduje ekonomickou analýzu tohoto problému rozhodování.



**Obrázek 16** – Globální rizika  $R_P$  versus  $R_C$  pro příklad kuličkových ložisek. Každý bod na této křivce odpovídá určité hodnotě  $r$ , násobiteli ochranného pásma, s uvedením několika konkrétních hodnot. Snaha snížit riziko spotřebitele posunutím meze přijetí dále dovnitř tolerančního intervalu (zvýšením  $r$ ) vždy zvyšuje riziko chybného odmítnutí vyhovujících ložisek. Pro zvolení optimálního rozhodovacího pravidla je třeba provést ekonomickou analýzu. Otevřený kroužek značí operační bod v daném příkladu.

### 9.5.5 Obecný grafický přístup

**9.5.5.1** U výrobního procesu s danou tolerancí  $T$ , danou normální apriorní PDF  $g_0(\eta) = \varphi(\eta; y_0, u_0^2)$  a měřicím systémem s danou normální PDF  $h(\eta_m|\eta) = \varphi(\eta_m; \eta, u_m^2)$  lze jako pomůcku pro nastavení mezí přijetí vytvořit podobný graf jako na Obrázku 17.

**9.5.5.2** V tomto příkladu se předpokládá, že apriorní informace je chudá v tom smyslu, že  $u_m^2 \ll u_0^2$ , takže odhad  $y \approx \eta_m$  s příslušnou standardní nejistotou  $u \approx u_m$  (viz odstavec A.4.4.3).

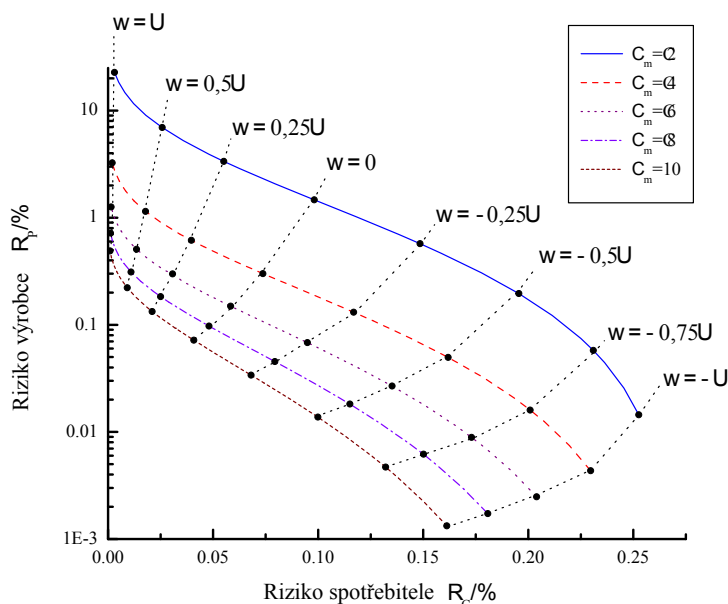
**9.5.5.3** Obrázek znázorňuje  $R_P$  versus  $R_C$  pro zvláštní případ, kdy  $u_0 = T/6$ .

**9.5.5.4** Těch 5 křivek na obrázku odpovídá hodnotám indexu způsobilosti měření  $C_m = T/(4u_m)$  v rozsahu od 2 do 10 a plné body podél každé křivky lokalizují ochranná pásma s různými rozměrovými parametry od  $w = -U$  do  $w = U$  s rozšířenou nejistotou  $U$  rovnou  $2u$ .

**9.5.5.5** K použití tohoto konkrétního grafu je nutné poznamenat, že

- o výrobním procesu se předpokládá, že je centrováný, takže apriorní odhad  $y_0$  měřené veličiny leží ve středu tolerančního intervalu;
- o rozměrových parametrech horního a spodního ochranného pásma se předpokládá, že jsou si rovny v absolutní hodnotě (symetrický interval přijetí);
- $R_P$  a  $R_C$  jsou vypočtena za předpokladu, že PDF výrobního procesu a měřicího systému mají normální rozdělení;

- pro měřicí schopnosti jiné než těch 5 uvedených hodnot je možné provést interpolaci;
- je též možné interpolovat podél těchto křivek pro získání odhadu ochranných pásem.



**Obrázek 17** – Globální rizika  $R_P$  versus  $R_C$  pro binární posuzování shody s apriorní standardní nejistotou  $u_0 = T/6$ . Pět uvedených křivek odpovídá hodnotám indexu způsobilosti měření  $C_m = T/(4u_m)$  v intervalu od 2 do 10. Plné body lokalizují ochranná pásma s rozměrovými parametry od  $w = -U$  do  $w = U$  s  $U = 2u$ . Kladné hodnoty  $w$  odpovídají chráněnému přijetí s mezemi přijetí uvnitř tolerančních mezí tak, jako na Obrázku 12 na straně 24.

### 9.5.6 Hodnota snížené nejistoty měření

**9.5.6.1** Snížení nejistoty spojené s výsledkem měření pro posuzování shody sníží též pravděpodobnost provedení nesprávného rozhodnutí přijmout/odmítnout. Tato skutečnost je dobře ilustrována na Obr. 17 tečkovanými čarami, které vyznačují umístění různých ochranných pásem.

**9.5.6.2** U rozhodovacího pravidla jednoduchého přijetí ( $w = 0$ ) lze vidět, že, například, kdyby nejistota měření byla taková, že  $C_m = T/(4u_m) = 2$ , pak by riziko spotřebitele bylo  $R_C \approx 0,1 \%$  a odpovídající riziko výrobce by bylo  $R_P \approx 1,5 \%$ .

**9.5.6.3** Investice do zlepšení měřicího systému s  $C_m = 10$  by snížilo tato rizika na  $R_C \approx 0,04 \%$  a resp.  $R_P \approx 0,07 \%$ . Zda takové snížení nejistoty měření je ekonomicky žádoucí, závisí na poměru mezi náklady na lepší metrologii a finančními úsporami z menšího počtu rozhodovacích omylů.

**9.5.6.4** Zlepšení výrobního procesu (snížení apriorní standardní nejistoty  $u_0$ ) bude mít podobný efekt snížení rizik jak spotřebitele, tak výrobce a bude zahrnovat obdobnou úvahu o poměru náklady/výnosy.



## Příloha A (informativní) Normální rozdělení

### A.1 Normální funkce hustoty pravděpodobnosti

**A.1.1** Předpokládejme, že bylo provedeno měření veličiny  $Y$ , která je předmětem našeho zájmu, jehož výsledkem je nejlepší odhad  $y$  a odpovídající standardní nejistota  $u(y) = u$ . V mnoha případech je rozptýl pravděpodobných hodnot  $\eta$  veličiny  $Y$  kolem odhadu  $y$ , při naměřené hodnotě  $\eta_m$ , velmi dobře charakterizována hustotou pravděpodobnosti normálního rozdělení (PDF) danou takto

$$g(\eta|\eta_m) = \frac{1}{u\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\eta - y}{u}\right)^2\right] =: \varphi(\eta; y, u^2), \quad (\text{A.1})$$

kde  $y = y(\eta_m)$ . V mnoha měřeních charakteru posuzování shody je  $y \approx \eta_m$ , ale není tomu tak vždy; viz odstavec A.4.4.

### A.2 Integrály normálních PDF

**A.2.1** Při výpočtu pravděpodobností pokrytí, pravděpodobností shody a/nebo rizik spotřebitele a výrobce je třeba často vyhodnotit integrály normálních PDF v konečných či polo-nekonečných mezích. Takové integrály však nelze vyhodnotit (vyčíslit) analyticky a jsou tedy vyhodnocovány numericky a tabelovány. V zájmu zjednodušení značení je vhodné zavést standardizovanou normální PDF,  $\varphi_0(t)$ , definovanou takto

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-t^2/2) = \varphi(t; 0, 1). \quad (\text{A.2})$$

**A.2.2** Existují 2 obvyklé způsoby, kterými jsou integrály normálních PDF vyjadřovány:

(a) standardizovaná normální rozdělovací funkce,  $\Phi(t)$ , definovaná jako

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp(-t^2/2) dt = \int_{-\infty}^z \varphi_0(t) dt, \quad (\text{A.3})$$

a

(b) chybová funkce,  $\text{erf}(z)$ , definovaná jako

$$\text{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2) dt. \quad (\text{A.4})$$

Mezi těmito funkcemi je jednoduchý vztah; z definicí (A.3) a (A.4) můžeme vidět, že

$$\Phi(z) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \text{erf}(z/\sqrt{2}) \right]. \quad (\text{A.5})$$

**A.2.3** Uvažujme pravděpodobnost, že  $Y$  leží v intervalu  $a \leq Y \leq b$  při naměřené hodnotě  $\eta_m$ . Pro normální PDF výrazu (A.1) je tato pravděpodobnost dána takto

$$\Pr(a \leq Y \leq b|\eta_m) = \frac{1}{u\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\eta - y}{u}\right)^2\right] d\eta.$$

Položíme-li  $z = (\eta - y)/u$  a  $dz = d\eta/u$ , nabude tento výraz tvaru

$$\Pr(a \leq Y \leq b|\eta_m) = \int_{(a-y)/u}^{(b-y)/u} \varphi_0(z) dz = \Phi\left(\frac{b-y}{u}\right) - \Phi\left(\frac{a-y}{u}\right), \quad (\text{A.6})$$

použitím výrazů (A.2) a (A.3).

### A.3 Praviděpodobnosti pokrytí pro normální PDF

**A.3.1** V běžném speciálním případě body  $a$  a  $b$  definují interval pokrytí (nebo interval nejistoty) šířky  $2U$  kolem odhadu  $y$ , kde  $U = ku$  je rozšířená nejistota pro daný faktor pokrytí  $k$  (viz odstavec 6.3.2). Pak  $a = y - ku$ ,  $b = y + ku$  a výraz (A.6) nabude tvaru

$$\Pr(|Y - y| \leq ku | \eta_m) = \Phi(k) - \Phi(-k) = \operatorname{erf}(k/\sqrt{2}) = P(k).$$

Praviděpodobnosti pokrytí (nebo úrovně spolehlivosti) pro  $k = 1, 2$ , a  $3$  pak jsou:

$$P(1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \operatorname{erf}(1/\sqrt{2}) = 0,683 = 68,3 \%,$$

$$P(2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = \operatorname{erf}(2/\sqrt{2}) = 0,955 = 95,5 \%,$$

$$P(3) = \Phi(3) - \Phi(-3) = \operatorname{erf}(3/\sqrt{2}) = 0,997 = 99,7 \%.$$

### A.4 Normální proces a hustoty pravděpodobnosti měření

#### A.4.1 Apriorní PDF $g_0(\eta)$ pro měřenou veličinu $Y$

**A.4.1.1** Před provedením měření je znalost měřené veličiny  $Y$  často dobře charakterizována normální apriorní PDF. Označíme-li nejlepší odhad jako  $y_0$  a příslušnou standardní nejistotu jako  $u_0$ , je apriorní PDF dána vztahem

$$g_0(\eta) = \varphi(\eta; y_0, u_0^2) = \frac{1}{u_0\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\eta - y_0}{u_0}\right)^2\right] = \sqrt{\frac{w_0}{2\pi}} \exp\left[-\frac{w_0}{2}(\eta - y_0)^2\right]. \quad (\text{A.7})$$

V posledním výrazu byla zavedena váha  $w_0 = 1/u_0^2$  pro zjednodušení následujícího výkladu.

#### A.4.2 PDF $h(\eta_m|\eta)$ pro $Y_m$ , je-li dána hodnota $Y = \eta$

**A.4.2.1** Předpokládejme, že měřicí systém použitý pro posouzení shody je charakterizován, přes věrohodnostní funkci, normální PDF. Je-li takový systém použit k měření vlastnosti, která nás zajímá, s předpokládanou hodnotou  $Y = \eta$  je pak PDF vyjadřující víru v možné hodnoty  $Y_m$  dána takto

$$h(\eta_m|\eta) = \varphi(\eta_m; \eta, u_m^2) = \frac{1}{u_m\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\eta_m - \eta}{u_m}\right)^2\right] = \sqrt{\frac{w_m}{2\pi}} \exp\left[-\frac{w_m}{2}(\eta_m - \eta)^2\right], \quad (\text{A.8})$$

kde  $w_m = 1/u_m^2$ .

**A.4.2.2** Normální PDF výrazu (A.8) rozumně charakterizuje měření analyzované použitím postupu popsaného v GUM v tom případě, kdy existují podmínky pro platnost Centrální limitní věty. GUM nepředpokládá žádnou apriorní znalost měřené veličiny, takže rozptyl hodnot, které lze rozumně přiřadit měřené veličině na základě měření, je charakterizován standardní nejistotou  $u_m$ .

#### A.4.3 Marginální PDF $h_0(\eta_m)$ pro $Y_m$

**A.4.3.1** Je zajímavé se ptát, a důležité z praktických důvodů znát, jakou naměřenou hodnotu  $\eta_m$  můžeme realizovat, jestliže byl předmět náhodně vybrán z výrobního procesu a vlastnost  $Y$ , která nás zajímá, byla změřena. Pro proces charakterizovaný apriorní PDF výrazu (A.7) a měřicí systém charakterizovaný PDF výrazu (A.8) lze požadovanou

PDF vypočítat jako marginální hustotu pravděpodobnosti použitím výrazu (16a) takto:

$$\begin{aligned}
 h_0(\eta_m) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\eta) h(\eta_m|\eta) d\eta \\
 &= \frac{\sqrt{w_0 w_m}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(w_0(\eta - y_0)^2 + w_m(\eta_m - \eta)^2\right)\right] d\eta \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{w_0 w_m}{w_0 + w_m}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{w_0 w_m}{w_0 + w_m} (\eta_m - y_0)^2\right] \\
 &= \frac{1}{u_{\eta_m} \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\eta_m - y_0}{u_{\eta_m}}\right)^2\right] \\
 &= \varphi(\eta_m; y_0, u_{\eta_m}^2),
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

kde

$$u_{\eta_m} = \sqrt{\frac{w_0 + w_m}{w_0 w_m}} = \sqrt{u_0^2 + u_m^2}. \tag{A.10}$$

**A.4.3.2** Je vidět, že PDF  $h_0(\eta_m)$  má normální rozdělení s očekávanou hodnotou  $y_0$  a příslušnou standardní nejistotou  $u_{\eta_m}$  danou výrazem (A.10).

**A.4.3.3** Očekávaná hodnota  $E(Y_m) = y_0$  plyne z předpokladu, že daný měřicí systém byl korigován na všechny známé významné systematické vlivy a je tak prostý vychýlení.

**A.4.3.4** Vidíme, že standardní nejistota  $u_{\eta_m}$  ve výrazu (A.10) je součtem čtverců standardních nejistot spojených s PDF procesu a měřicího systému. Tyto dva zdroje nejistoty (výrobní proces s rozptylem a nedokonalý měřicí systém) se ve svých vlivech na znalost možných naměřených hodnot vlastnosti, která nás zajímá, přirozeným způsobem skládají. Máme-li vysoce přesný měřicí systém ve smyslu, že  $u_m \ll u_0$ , pak  $u_{\eta_m} \approx u_0$  a nejistota kolem možných naměřených hodnot veličiny je téměř výhradně dána neúplnými informacemi o výrobním procesu.

#### A.4.4 Následná PDF (po měření) $g(\eta|\eta_m)$ pro $Y$

**A.4.4.1** Položíme-li rovnými pravé strany výrazů (16a) a (16b) na straně 26, dostaneme po úpravě PDF měřené veličiny  $Y$  po provedení měření, které poskytlo naměřenou hodnotu  $\eta_m$ :

$$g(\eta|\eta_m) = \frac{g_0(\eta) h(\eta_m|\eta)}{h_0(\eta_m)}. \tag{A.11}$$

Porovnání s výrazem (1) na straně on page 11 ukazuje, že tento výsledek má tvar Bayesova teorému se jmenovatelem  $h_0(\eta_m)$  daným výrazem (A.9). Dosazení normálních PDF výrazů (A.7)–(A.9) do výrazu (A.11) dává

$$\begin{aligned}
 g(\eta|\eta_m) &= \sqrt{\frac{w_0 + w_m}{2\pi}} \exp\left[-\frac{w_0 + w_m}{2} \left(\eta - \frac{w_0 y_0 + w_m \eta_m}{w_0 + w_m}\right)^2\right] \\
 &= \frac{1}{u \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\eta - y}{u}\right)^2\right] \\
 &= \varphi(\eta; y, u^2),
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

kde

$$y = \frac{w_0 y_0 + w_m \eta_m}{w_0 + w_m}, \tag{A.13}$$

a

$$u = \frac{1}{\sqrt{w_0 + w_m}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{u_0^2} + \frac{1}{u_m^2}}} = \frac{u_0 u_m}{\sqrt{u_0^2 + u_m^2}}. \tag{A.14}$$

**A.4.4.2** Bayesův teorém vyjadřuje vliv nové informace o měřené veličině  $Y$  dodané naměřenou hodnotou  $\eta_m$  a s ní spojenou standardní nejistotou  $u_m$ . Je vidět, že následná hustota pravděpodobnosti (A.12) má tvar normálního rozdělení, jehož očekávaná hodnota (nejlepší odhad)  $y$ , výraz (A.13), je váženým průměrem  $y_0$  a  $\eta_m$ s vahami rovnými recipročním hodnotám odpovídajících, s nimi spojených rozptylů.

**A.4.4.3** Z výrazu (A.14) je vidět, že standardní nejistota  $u$  spojená s odhadem  $y$  je vždy menší než jak  $u_0$  tak  $u_m$ . Existují dva případy zvláštního zájmu, se kterými se lze běžně setkat v praxi.

- Je-li apriorní znalost natolik chudá, že nelze ani učinit pokus přiřadit explicitní apriorní PDF měřené veličině  $Y$ , pak  $u_m \ll u_0$ , takže  $w_m \gg w_0$ . Z výrazu (A.14) pak plyne, že

$$y \approx \eta_m, \quad u \approx u_m,$$

a lze říci, že veškerá odpovídající znalost možných hodnot  $Y$  je odvozena ze samotného měření. Taková měření jsou předmětem GUM, který představuje návod pro vyhodnocení  $u_m$  na základě vhodného modelu měření.

- Při typické kalibraci je použit měřicí přístroj k měření referenčního etalonu, který nám poskytuje odhad  $y_0$  veličiny  $Y$  s malou odpovídající nejistotou  $u_0$ . U takové kalibrace je systematická chyba měřicího přístroje málo známa *a priori* v tom smyslu, že  $u_0 \ll u_m$ , neboli  $w_0 \gg w_m$ . Následná PDF pro  $Y$  je pak taková, že opět použitím výrazu (A.14),

$$y \approx y_0, \quad u \approx u_0.$$

V souladu se zdravým rozumem nemůže být znalost referenčního etalonu změněna kalibračním měřením. Údaj přístroje však poskytuje informaci o chybě indikace tohoto přístroje, což je veličina, o kterou se při kalibraci zajímáme.

## A.5 Výpočty rizik s normálními PDF a binární rozhodovací pravidlo

**A.5.1** Obecné vzorce pro výpočet globálních rizik spotřebitele a výrobce byly odvozeny v odstavci 9.5 a zvláštní případ posuzování shody s binárním rozhodovacím pravidlem byl předmětem výkladu v odstavci 9.5.3. Je zajímavé odvodit výrazy pro globální rizika v běžném případě binárního rozhodovacího pravidla, jsou-li apriorní znalosti o měřené veličině a možných výstupech měřicího systému v obou případech popsány normálními rozděleními.

**A.5.2** Za předpokladu normálních rozdělení, výrazy (A.7) a (A.8) pro PDF charakterizující výrobní proces a měřicí systém, je sdružená PDF  $f(\eta, \eta_m)$ , (výraz (16a) na straně 26), pro výsledek měření rovna

$$f(\eta, \eta_m) = g_0(\eta) h(\eta_m|\eta) = \frac{1}{2\pi u_0 u_m} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\eta - y_0}{u_0} \right)^2 + \left( \frac{\eta_m - \eta}{u_m} \right)^2 \right] \right\}.$$

Položíme-li  $v = (\eta_m - \eta)/u_m$ ,  $dv = d\eta_m/u_m$  a  $z = (\eta - y_0)/u_0$ ,  $dz = d\eta/u_0$  a dosazením do výrazů (19) a (20) dostaneme po zjednodušení tyto vztahy pro globální rizika spotřebitele a výrobce:

$$R_C = \int_{-\infty}^{\frac{T_L - y_0}{u_0}} F(z) \varphi_0(z) dz + \int_{\frac{T_U - y_0}{u_0}}^{\infty} F(z) \varphi_0(z) dz \quad (\text{A.15})$$

a

$$R_P = \int_{\frac{T_L - y_0}{u_0}}^{\frac{T_U - y_0}{u_0}} (1 - F(z)) \varphi_0(z) dz. \quad (\text{A.16})$$

V těchto výrazech je  $\varphi_0(z) = (1/\sqrt{2\pi}) \exp(-z^2/2)$  standardizovaná normální PDF a

$$F(z) = \Phi \left( \frac{T_U - y_0 - u_0 z}{u_m} \right) - \Phi \left( \frac{T_L - y_0 - u_0 z}{u_m} \right), \quad (\text{A.17})$$

kde  $\Phi(t)$  je standardizovaná normální rozdělovací funkce.

## Příloha B (informativní) Apriorní znalost měřené veličiny

### B.1 Statistické řízení procesů

**B.1.1** U mnoha posuzování shody znalost měřené veličiny  $Y$  před provedením měření není explicitně při provádění rozhodnutí přijmout/odmítnout uvažována. V takových případech, které jsou typické pro měření analyzovaná na základě principů obsažených v GUM, existuje implicitní předpoklad, že apriorní znalost  $Y$  je natolik slabá, že má zanedbatelný vliv na výstup procesu rozhodování.

**B.1.2** U procesu, ve kterém je za určité období vyroben určitý počet nominálně identických výrobků, lze charakter procesu studovat periodickým měřením vzorku jeho výstupu. Statistiky vytvořené v průběhu takových měření jako je pohyblivý průměr vzorku (výběru) a výběrová směrodatná odchylka poskytují informaci o stabilitě procesu tak, že může být změněno jeho nastavení pro dosažení kritérií kvality výroby. Vytváření a využití informací z měření tímto způsobem tvoří základ statistického řízení procesů (SPC). Je k tomu k dispozici rozsáhlá literatura; viz například odkazy [33, 43].

**B.1.3** Chování procesu v SPC se obvykle vyhodnocuje za předpokladu, že vzorek předmětů měřený pro účely řízení kvality zahrnuje soubor realizací stabilního frekvenčního rozdělení. Odhady střední hodnoty  $\mu$  a směrodatné odchylky  $\sigma$  tohoto rozdělení jsou získávány z výběrových statistik.

POZNÁMKA Proces, u kterého střední hodnoty a směrodatné odchylky vzorek od vzorku vykazují přijatelné variability ve vztahu ke stanoveným mezím, je znám jako stabilní proces.

**B.1.4** Apriorní PDF  $g_0(\eta)$  měřené veličiny  $Y$  pak má matematickou formu frekvenčního rozdělení naznačenou histogramem naměřených hodnot veličiny. Vlastnosti, která nás zajímá u předmětu náhodně vybraného z procesu, bude pak přiřazen nejlepší odhad  $y_0 = \mu$  a odpovídající standardní nejistota  $u_0 = \sigma$ .

**B.1.5** Tento typický postup SPC má dva zásadní nedostatky: (a) spolehlivý proces modelování použitím histogramu obvykle vyžaduje velké výběry, které nemusí být k dispozici, a (b) nejistota spojená s měřeními na výběrech je ignorována a nehraje žádnou roli v přiřazení PDF  $g_0(\eta)$ . Následující přístup řeší oba z těchto problémů a redukuje se na obvyklý výsledek SPC ve vhodných mezích.

### B.2 Předmět náhodně vybraný z měřeného vzorku předmětů

**B.2.1** Uvažujme vzorek  $n$  předmětů, každý z nich mající vlastnost  $Y$ , o kterou se zajímáme pro posuzování shody. Vzorek je z výrobního procesu, o kterém se předpokládá, že je stabilní, a je shromážděn za vhodnou časovou periodu. Příklady mohou být:

- vzorek  $n$  délkových etalonů (kostek), každý charakterizovaný délkou  $L$ ;
- vzorek  $n$  číslicových voltmetrů, každý charakterizovaný chybou indikace  $E$ , je-li měřeno etalonové referenční napětí;
- vzorek  $n$  konektorů vláknové optiky, každý charakterizovaný vloženou ztrátou  $\Lambda$ .

**B.2.2** U každého z  $n$  předmětů je změřena vlastnost, která nás zajímá, což vytváří soubor odhadů  $y_1, \dots, y_n$  a příslušných standardních nejistot měření  $\tilde{u}$ . Nejistota  $\tilde{u}$  závisí na postupu, který byl pro měření vzorků použit, a předpokládá se, že je stejný pro všechna měření. Vlastnosti vzorků jsou pak vyjádřeny výpočtem výběrové střední hodnoty  $\bar{y}$  a výběrového rozptylu  $s^2$  definovaných takto

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k, \quad (\text{B.1})$$

a

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (y_k - \bar{y})^2. \quad (\text{B.2})$$

POZNÁMKA Výběrový rozptyl je často definován jako podíl součtu  $\sum_{k=1}^n (y_k - \bar{y})^2$  a  $n - 1$  spíš než  $n$ . Lze dokázat, že výsledná veličina je nevychýleným odhadem rozptylu  $\sigma^2$  frekvenčního rozdělení, ze kterého se předpokládá, že je vzorek vybrán. Při definování  $s^2$  ve výrazu (B.2) není cílem získat odhad neznámého rozptylu, ale spíš charakterizovat rozložení hodnot ve výběru kolem jejich střední hodnoty. Můžeme-li předpokládat, že data jsou náhodným výběrem z normálního frekvenčního rozdělení  $\varphi(\eta; \mu, \sigma^2)$ , pak lze ukázat, že výběrový rozptyl (B.2) je odhadem maximální pravděpodobnosti  $\sigma^2$  [10].

**B.2.3** Jeden ze změřených předmětů je náhodně vybrán (s pravděpodobností  $1/n$ ) jako představitel výrobního procesu. Nechť  $Y_r$  značí vlastnost, která nás zajímá, u tohoto náhodně vybraného předmětu. Informace mající vztah k možným hodnotám  $\eta$  veličiny  $Y_r$  je tvořena pouze výběrovými statistikami (B.1) a (B.2), individuální odhady  $y_1, \dots, y_n$  jsou odloženy ihned po ukončení měření. Sumární vlastnosti PDF  $Y_r$  lze vypočítat následujícím způsobem.

**B.2.4** Nechť  $f_r(\eta)$  je PDF  $Y_r$  a označme PDF pro  $n$  veličin výběru  $Y_1, \dots, Y_n$  jako  $f_k(\eta)$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Bereme-li v úvahu, že každý z  $n$  předmětů má stejnou pravděpodobnost, že bude vybrán, lze  $f_r(\eta)$  psát jako marginální PDF

$$f_r(\eta) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_k(\eta), \quad (\text{B.3})$$

vhodně nazývanou rozdělení konečné směsice [41].

**B.2.5** Tvar určité PDF  $f_k(\eta)$  není obecně znám, ale protože poskytuje určitou znalost hodnoty vlastnosti  $Y_k$   $k$ -tého měřeného předmětu,

$$E(Y_k) = y_k = \int_{-\infty}^{\infty} \eta f_k(\eta) d\eta, \quad (\text{B.4})$$

a

$$V(Y_k) = \tilde{u}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\eta - y_k)^2 f_k(\eta) d\eta. \quad (\text{B.5})$$

Jsou-li dány tyto výsledky a PDF  $f_r(\eta)$  výrazu (B.3), lze pak vypočítat odhad  $y_r$  vlastnosti  $Y_r$  a s tím spojené standardní nejistoty  $u_r$ .

**B.2.6** Pro odhad  $y_r$  podle definice máme

$$y_r = \int_{-\infty}^{\infty} \eta f_r(\eta) d\eta = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \eta f_k(\eta) d\eta = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k,$$

kde výraz (B.4) byl použit v posledním kroku. Porovnání tohoto výsledku s výrazem (B.1) ukazuje, že *a priori* odhad  $Y$  je roven výběrové střední hodnotě:

$$y_r = \bar{y}. \quad (\text{B.6})$$

**B.2.7** Příslušný rozptyl  $Y$ , jehož kladná odmocnina je standardní nejistota, je pak dán vztahem

$$u_r^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\eta - \bar{y})^2 f_r(\eta) d\eta = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} (\eta - \bar{y})^2 f_k(\eta) d\eta. \quad (\text{B.7})$$

Píšeme-li nyní

$$(\eta - \bar{y})^2 = (\eta - y_k + y_k - \bar{y})^2 = (\eta - y_k)^2 + (y_k - \bar{y})^2 + 2(\eta - y_k)(y_k - \bar{y}),$$

a použijeme-li výrazy (B.4) a (B.5), vede dosazení do výrazu (B.7) k tomuto výsledku

$$u_r^2 = \tilde{u}^2 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (y_k - \bar{y})^2. \quad (\text{B.8})$$

**B.2.8** Vidíme, že součet na pravé straně výrazu (B.8) je výběrovým rozptylem  $s^2$  [viz výraz (B.2)], takže

$$u_r^2 = \tilde{u}^2 + s^2, \quad (\text{B.9})$$

a standardní nejistota spojená s apriorním odhadem  $y_0$  je

$$u_r = \sqrt{\tilde{u}^2 + s^2}. \quad (\text{B.10})$$

**B.2.9** Vidíme, že standardní nejistota  $u_r$  daná výrazem (B.10) je kvadrurní kombinací [neboli odmocninou ze součtu čtverců (RSS)] dvou složek, kterými jsou právě ty dva parametry, které charakterizují výběrová data: člen  $\tilde{u}^2$  jako důsledek běžné standardní nejistoty spojené s měřeními na vzorku, a člen  $s^2$ , který charakterizuje variabilitu odhadů  $y_1, \dots, y_n$ .

POZNÁMKA Variabilita z rozptylu procesu a nedostatečná opakovatelnost měření se v pozorovaném výběrovém rozptylu  $s^2$  kombinují. Standardní nejistota  $\tilde{u}$  by měla obsahovat složku, která podchycuje vliv rozptylu měření.

**B.2.10** Vypočtený odhad a výběrový rozptyl pro náhodně vybraný předmět, výrazy (B.6) a (B.7), jsou pak použity k charakterizaci budoucí produkce procesu za předpokladu, že je stabilní a bez driftu. Logický model uvažování metrologa či kontrolora by měl být následující:

“Vybral jsem budoucí předmět z výrobního procesu. Co mohu říci o vlastnosti  $Y$  tohoto předmětu před tím, než bude změřen? Na základě výsledků výběrových měření věřím, že nejlepší odhad  $Y$  je  $y_0 = y_r$ , daný výrazem (B.6), s příslušným rozptylem  $u_0^2 = u_r^2$  daným výrazem (B.9). To je rozsah mých znalostí. Při existenci této informace a principu maximální entropie (viz JCGM 101:2008 6.3 a odkaz [45]) zvolím normální PDF, aby představovala a podchytila moji apriorní znalost vlastnosti  $Y$  u tohoto předmětu.”

**B.2.11** To vede k následujícímu normálnímu (či Gaussovu) rozdělení pro podchycení apriorní znalosti vlastnosti  $Y$ :

$$g_0(\eta) = \frac{1}{u_0\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\eta - y_0}{u_0}\right)^2\right] = \varphi(\eta; y_0, u_0^2),$$

with  $y_0 = \bar{y}$  a  $u_0^2 = \tilde{u}^2 + s^2$ .

**B.2.12** V obvyklém případě, kdy  $s^2 \gg \tilde{u}^2$ , u nejistoty hodnoty vlastnosti předmětu náhodně vybraného z výrobního procesu dominuje variabilita procesu. Pak  $u_0 \approx \sigma \approx s$ , kde je proces modelován frekvenčním rozdělením se směrodatnou odchylkou  $\sigma$ , jejímž odhadem je výběrová směrodatná odchylka  $s$ .

### B.3 Kladná vlastnost v blízkosti určitého fyzikálního limitu

**B.3.1** Normální PDF má nekonečný rozsah hodnot. V případě vlastnosti (měřené veličiny), která nabývá pouze kladných hodnot, přiřazená normální PDF rozprostře část své pravděpodobnosti přes záporné (tudíž nedosažitelné) hodnoty této vlastnosti. U vlastnosti, jejíž nejlepší odhad leží uvnitř několikanásobku své příslušné standardní nejistoty nuly, může být tato část pravděpodobnosti významná. V takovém případě by bylo přiřazení normální PDF takové veličině nevhodným způsobem pro podchycení znalosti o měřené veličině.

**B.3.2** Mnoho známých PDF je omezeno pouze na kladné hodnoty svých nezávisle proměnných. V závislosti na dostupných informacích může taková PDF sloužit jako model znalosti měřené veličiny  $Y$  v blízkosti určité fyzikální meze. V případě, kdy je znalost  $Y \geq 0$  omezena na odhad a s ním spojený rozptyl jako v odstavci B.2, vede princip maximální entropie k přiřazení normálního rozdělení, které je ořezáno v nule [11]. Můžeme-li předpokládat, že hodnoty  $Y$  v blízkosti nuly mají zanedbatelnou pravděpodobnost, může se ukázat jako vhodné přiřadit této veličině apriorní PDF  $g_0(\eta)$  která se blíží nule, když  $\eta \rightarrow 0$ . Jedním z takových rozdělení je PDF ve tvaru funkce gamma, jejíž použití nám poslouží jako příklad.

**B.3.3** Gamma PDF, s kladnými parametry  $\alpha$  a  $\lambda$  je definována jako

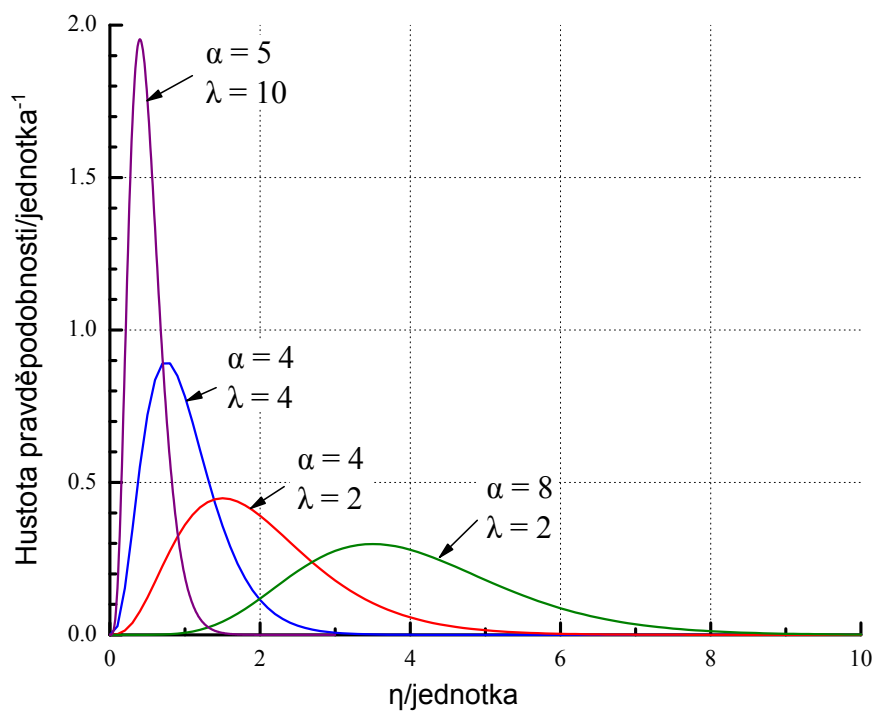
$$\text{gamma}(\eta; \alpha, \lambda) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \eta^{\alpha-1} e^{-\lambda\eta}, \quad \eta \geq 0, \quad (\text{B.11})$$

kde  $\Gamma(\alpha)$  je gamma funkce:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

POZNÁMKA 1 Speciální případ gamma PDF zahrnuje gamma( $\eta; 1, \lambda$ ) (exponenciální PDF s parametrem  $\lambda$ ) a gamma( $\eta; n/2, 1/2$ ) (a chi-čtverec PDF s  $n$  stupni volnosti).

POZNÁMKA 2 Je možné definovat 3-parametrické gamma rozdělení nahrazením  $\eta$  ( $\eta - \gamma$ ) ve výrazu (B.11), kde se parametr  $\gamma$  stává levým koncovým bodem a rozdělení je omezeno na interval  $\eta \geq \gamma$ .



Obrázek B.1 – Několik gamma( $\eta; \alpha, \lambda$ ) PDF vypočtených podle výrazu (B.11) pro vybrané páry parametrů ( $\alpha, \lambda$ ).



**B.3.4** Obrázek B.1 znázorňuje čtyři gamma PDF pro určité hodnoty  $\alpha$  a  $\lambda$ . Očekávaná hodnota a rozptyl gamma PDF jsou dány vztahy

$$E(Y) = y_0 = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad V(Y) = u_0^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2}, \quad (\text{B.12})$$

a maximální hodnota (modus) rozdělení nastává, když

$$\eta = \frac{\alpha - 1}{\lambda}. \quad (\text{B.13})$$

**B.3.5** V závislosti na stavu apriorních informací lze vhodné hodnoty  $\alpha$  a  $\lambda$  odhadnout na základě těchto výrazů. V případě, že znalost vlastnosti (měřené veličiny)  $Y$  je získána změřením vzorku výrobků, lze apriorní odhad a příslušný rozptyl obdržet pomocí statistik odvozených ze vzorku:  $y_0 = \bar{y}$  a  $u_0^2 = s^2$ . Z výrazů (B.12) lze pak určit parametry gamma PDF:

$$\alpha = \frac{\bar{y}^2}{s^2}, \quad \lambda = \frac{\bar{y}}{s^2}. \quad (\text{B.14})$$

Tyto odhady jsou tzv. odhady ‘metody momentů’, a mohou být neuspokojivé u malých velikostí vzorků. Alternativou jsou zde odhady maximální věrohodnosti, ty však většinou vyžadují nějakou formu číslicové optimalizace nebo řešení systému nelineárních rovnic.

**B.3.6** Příklad použití gamma PDF při výpočtu rizik spotřebitele a výrobce je uveden v odstavci 9.5.4.

**B.3.7** Užitečné informace o vlastnostech a užití rozdělení pravděpodobnosti lze nalézt v knihách Evans, Hastings a Peacock [30] a Johnson, Kotz a Balakrishnan [28].

**Příloha C**  
**(informativní)**  
**Slovník hlavních symbolů**

POZNÁMKA Pro termín *funkce hustoty pravděpodobnosti* je použita zkratka PDF.

$\mathcal{A}$	interval přijatelných naměřených hodnot $Y_m$
$\tilde{\mathcal{A}}$	interval nepřijatelných naměřených hodnot $Y_m$
$A_L$	spodní mez přijetí
$A_U$	horní mez přijetí
$a$	spodní mez intervalu, o němž je známo, že v něm leží náhodná proměnná
$b$	horní mez intervalu, o němž je známo, že v něm leží náhodná proměnná
$\mathcal{C}$	interval shodných hodnot vlastnosti, která nás zajímá (měřené veličiny) $Y$
$\tilde{\mathcal{C}}$	interval neshodných hodnot vlastnosti, která nás zajímá (měřené veličiny) $Y$
$C_m$	index způsobilosti měření
$E(X)$	očekávaná hodnota náhodné proměnné $X$
$E(Y \eta_m)$	podmíněná očekávaná hodnota měřené veličiny $Y$ , je-li dána určitá hodnota měřené veličiny $\eta_m$
$E_{max}$	maximální dovolená chyba indikace měřicího přístroje
$\text{erf}(z)$	chybová funkce proměnné $z$
$f(\eta, \eta_m)$	sdužená PDF s proměnnými $\eta$ a $\eta_m$ pro veličiny $Y$ a $Y_m$
$G_X(\xi)$	rozdělovací funkce s proměnnými $\xi$ pro veličinu $X$
$\text{gamma}(\eta; \alpha, \lambda)$	gamma PDF s proměnnou $\eta$ a parametry $\alpha$ a $\lambda$
$g(\eta \eta_m)$	PDF s proměnnou $\eta$ pro měřenou veličinu $Y$ , je-li dána určitá hodnota měřené veličiny $\eta_m$
$g_0(\eta)$	PDF s proměnnou $\eta$ pro měřenou veličinu $Y$ před měřením
$g_0(\eta I)$	apriorní PDF s proměnnou $\eta$ pro měřenou veličinu $Y$ s explicitním znázorněním apriorní informace $I$ ; stejné jako $g_0(\eta)$
$g_X(\xi)$	PDF s proměnnou $\xi$ pro veličinu $X$
$h(\eta_m \eta)$	PDF s proměnnou $\eta_m$ pro výstupní veličinu $Y_m$ měřicího systému, daná jako předpokládaná pravá hodnota $\eta$ měřené veličiny $Y$
$h_0(\eta_m)$	marginální PDF s proměnnou $\eta_m$ pro výstupní veličinu $Y_m$ měřicího systému
$k$	faktor pokrytí
$\mathcal{L}(\eta; \eta_m)$	věrohodnost pravé hodnoty $\eta$ , je-li dána určitá hodnota měřené veličiny $\eta_m$
$p$	pravděpodobnost pokrytí
$p_c$	pravděpodobnost shody
$\bar{p}_c$	pravděpodobnost neshody
$R_C$	globální riziko spotřebitele
$R_C^*$	specifické riziko spotřebitele
$R_P$	globální riziko výrobce

$R_P^*$	specifické riziko výrobce
$s^2$	výběrový rozptyl
$T$	tolerance
$T_L$	spodní mez tolerance
$T_U$	horní mez tolerance
$U$	rozšířená nejistota
$u$	standardní nejistota
$u_0$	standardní nejistota s odhadem $y_0$ měřené veličiny $Y$ před provedením měření
$u_m$	standardní nejistota spojená s určitou hodnotou měřené veličiny $\eta_m$ je-li apriorní znalost měřené veličiny zanedbatelná
$V(X)$	rozptyl náhodné proměnné $X$
$V(Y \eta_m)$	podmíněný rozptyl měřené veličiny $Y$ , je-li dána určitá hodnota měřené veličiny $\eta_m$
$w$	rozměrový parametr ochranného pásma
$Y$	měřitelná vlastnost (měřená veličina) určitého předmětu považovaná za náhodnou proměnnou
$Y_m$	výstup měřicího systému považovaný za náhodnou proměnnou
$\bar{y}$	výběrová střední hodnota
$y_0$	očekávaná hodnota $Y$ před provedením měření
$\tilde{y}$	hodnota měřené veličiny ve vhodném měřítku
$\alpha$	parametr gamma PDF
$\Gamma(z)$	gamma funkce s proměnnou $z$
$\eta$	proměnná vyjadřující možné hodnoty měřené veličiny $Y$
$\lambda$	parametr gamma PDF
$\Phi(z)$	funkce standardizovaného normálního rozdělení s proměnnou $z$
$\varphi_0(z)$	standardizované normální PDF s proměnnou $z$
$\varphi(\eta; y, u^2)$	normální (Gaussova) PDF s proměnnou $\eta$ , očekávaná hodnota $y$ a rozptyl $u^2$

## Bibliografie

- [1] AGILENT TECHNOLOGIES. Metrology Forum. 2001. <http://metrologyforum.tm.agilent.com/terminology.shtml>.
- [2] AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS. ASME B89.7.3.1:2001 *Guidelines for decision rules: Considering measurement uncertainty in determining conformance to specifications*. New York, NY, 2001.
- [3] BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP, AND OIML. Evaluation of measurement data — Supplement 3 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement”— Modelling. Joint Committee for Guides in Metrology, JCGM 103, in preparation.
- [4] BOX, G. E. P., AND TIAO, G. C. *Bayesian Inference in Statistical Analysis*. Wiley Classics Library. John Wiley and Sons, 1992.
- [5] D’AGOSTINI, G. *Bayesian Reasoning in Data Analysis*. World Scientific Publishing, 2003.
- [6] DEEVER, D. How to maintain your confidence (in a world of declining test uncertainty ratios). *1993 NCSL Workshop and Symposium* (1993), 133–53.
- [7] DEEVER, D. Guardbanding with confidence. *1994 NCSL Workshop and Symposium* (1994), 383–94.
- [8] DEEVER, D. Managing calibration confidence in the real world. *1995 NCSL Workshop and Symposium* (1995), 1–17.
- [9] DEEVER, D. Guardbanding and the world of ISO Guide 25: Is there only one way? *1998 NCSL Workshop and Symposium* (1998), 319–32.
- [10] DEGROOT, M. H. *Probability and Statistics*. Addison-Wesley, 1975.
- [11] DOWSON, D. C., AND WRAGG, A. Maximum entropy distributions having prescribed first and second order moments. *IEEE Trans. IT 19* (1973), 689–693.
- [12] EAGLE, A. R. A method for handling errors in testing and measuring. *Ind. Qual. Control* 10, 3 (1954), 10–15.
- [13] EURACHEM/CITAC GUIDE. *Use of uncertainty information in compliance assessment*, 1st ed., 2007. [http://www.eurachem.org/guides/Interpretation\\_with\\_expanded\\_uncertainty\\_2007\\_v1.pdf](http://www.eurachem.org/guides/Interpretation_with_expanded_uncertainty_2007_v1.pdf).
- [14] FEARN, T., FISHER, S. A., THOMPSON, M., AND ELLISON, S. A decision theory approach to fitness for purpose in analytical measurement. *The Analyst* 127 (2002), 818–824.
- [15] FORBES, A. B. Measurement uncertainty and optimized conformance assessment. *Measurement* 39 (2006), 808–814.
- [16] GREGORY, P. *Bayesian Logical Data Analysis for the Physical Sciences*. Cambridge University Press, 2005.
- [17] GRUBBS, F. A., AND COON, H. J. On setting test limits relative to specification limits. *Ind. Qual. Control* 10, 3 (1954), 15–20.
- [18] HIBBERT, D. B. *Quality Assurance in the Analytical Chemistry Laboratory*. Oxford University Press, 2007.
- [19] INTERNATIONAL ELECTROTECHNICAL COMMISSION. IEC GUIDE 115 *Application of uncertainty of measurement to conformity assessment activities in the electrotechnical sector*. 2007. Edition 1.0.
- [20] INTERNATIONAL LABORATORY ACCREDITATION COOPERATION. ILAC-G8:1996 *Guidelines on assessment and reporting of compliance with specification*. Silverwater, Australia, 1996.
- [21] INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION. ISO 14253-1:1998 *Geometrical Product Specifications GPS — Inspection by measurement of workpieces and measuring equipment — Part 1: Decision rules for proving conformance or non-conformance with specifications*. Geneva, 1998.
- [22] INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION. ISO 10576-1:2003(E) *Statistical methods — Guidelines for the evaluation of conformity with specified requirements — Part 1: General principles*. Geneva, 2003.
- [23] INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION. ISO/IEC 17025:2005 *General requirements for the competence of testing and calibration laboratories*. Geneva, 2005.

- [24] INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION. ISO 3650 *Geometrical Product Specifications (GPS) — Length standards — Gauge blocks*, 2nd ed. Geneva, 1998.
- [25] INTERNATIONAL ORGANIZATION OF LEGAL METROLOGY. OIML R 111-1 Edition 2004(E) *Weights of classes E<sub>1</sub>, E<sub>2</sub>, F<sub>1</sub>, F<sub>2</sub>, M<sub>1</sub>, M<sub>1-2</sub>, M<sub>2</sub>, M<sub>2-3</sub>, M<sub>3</sub> — Part 1: Metrological and technical requirements*. Paris.
- [26] JAYNES, E. T. *Probability Theory: The Logic of Science*. Cambridge University Press, 2003.
- [27] JEFFREYS, H. *Theory of Probability*, 3rd ed. Clarendon Press, Oxford, 1983.
- [28] JOHNSON, N. L., KOTZ, S., AND BALAKRISHNAN, N. *Continuous Univariate Distributions, Volume 1*, 2nd ed. John Wiley & Sons, New York, NY, 1994.
- [29] KÄLLGREN, H., LAUWAARS, M., MAGNUSSON, B., PENDRILL, L., AND TAYLOR, P. Role of measurement uncertainty in conformity assessment in legal metrology and trade. *Accred. Qual. Assur.* 8 (2003), 541–47.
- [30] M. EVANS, N. H., AND PEACOCK, B. *Statistical Distributions*, 3rd ed. Wiley, 2000.
- [31] MODARRES, M., KAMINSKIY, M., AND KRIVTSOV, V. *Reliability and Risk Analysis*. Marcel Dekker, New York, 1999.
- [32] NCSL INTERNATIONAL. ANSI/NCSL Z540-3:2006 *Requirements for the Calibration of Measuring and Test Equipment*. Boulder, Colorado USA, 2006.
- [33] OAKLAND, J. S. *Statistical Process Control*, 6th ed. Butterworth-Heinemann, 2007.
- [34] PENDRILL, L. R. Optimised measurement uncertainty and decision-making when sampling by variables or by attribute. *Measurement* 39 (2006), 829–840.
- [35] PENDRILL, L. R. Optimised measurement uncertainty and decision-making in conformity assessment. *NCSLI Measure* 2, 2 (2007), 76–86.
- [36] PENDRILL, L. R., AND KÄLLGREN, H. Exhaust gas analysers and optimised sampling, uncertainties and costs. *Accred. Qual. Assur.* 11 (2006), 496–505.
- [37] POSSOLO, A., AND TOMAN, B. Assessment of measurement uncertainty via observation equations. *Metrologia* 44 (2007), 464–475.
- [38] ROSSI, G. B., AND CRENNNA, F. A probabilistic approach to measurement-based decisions. *Measurement* 39 (2006), 101–19.
- [39] SIVIA, D. S. *Data Analysis - A Bayesian Tutorial*. Clarendon Press, Oxford, 1996.
- [40] SOMMER, K.-D., AND KOCHSIEK, M. Role of measurement uncertainty in deciding conformance in legal metrology. *OIML Bulletin XLIII*, 2 (April 2002), 19–24.
- [41] TITTERINGTON, D. M. *Statistical analysis of finite mixture distributions*. Wiley, 1985.
- [42] VAN DER GRINTEN, J. G. M. Confidence levels of measurement-based decisions. *OIML Bulletin XLIV*, 3 (July 2003), 5–11.
- [43] WHEELER, D. J., AND CHAMBERS, D. S. *Understanding Statistical Process Control*, 2nd ed. SPC Press, 1992.
- [44] WILLIAMS, E., AND HAWKINS, C. The economics of guardband placement. In *Proceedings of the 24th IEEE International test Conference* (Baltimore, 1993).
- [45] WÖGER, W. Probability assignment to systematic deviations by the principle of maximum entropy. *IEEE Trans. Inst. Meas.* IM-20, 2 (1987), 655–8.